A Bolyai János Matematikai Társulat 1952. október 18-án rendezte Budapesten, Debrecenben, Egerben, Győrött, Miskolcon, Pécsett, Sopronban, Szegeden, Szolnokon és Veszprémben, tehát egyidejűleg 10 helyen az 1952. évi Kürschák József matematikai tanulóversenyt. A versenyen 1952-ben érettségizettek és középiskolás diákok vehettek részt. A résztvevők és beadott dolgozatok száma: Budapesten 344 résztvevő 168 dolgozattal, Debrecenben 41 résztvevő 21 dolgozattal, Egerben 16 résztvevő 5 dolgozattal, Győrött 29 résztvevő 14 dolgozattal, Miskolcon 82 résztvevő 21 dolgozattal, Pécsett 31 résztvevő 6 dolgozattal, Sopronban 27 résztvevő 6 dolgozattal, Szegeden 35 résztvevő 13 dolgozattal, Szolnokon 57 résztvevő 38 dolgozattal, Veszprémben 51 résztvevő 17 dolgozattal, összesen tehát 713 résztvevő 309 dolgozattal. A verseny feladatai a következők voltak:

1. Három kör közül kettőnek-kettőnek nincs közös belső pontja, s középpontjaik egy egyenesen vannak. Bizonyítandó, hogy ha egy negyedik kör mindhármat érinti, akkor ennek sugara nem lehet a négy körsugár közül a legkisebb.

2. Az 1-től $3n$-ig terjedő egész számok közül kiválasztunk $n+2$ darabot. Bizonyítandó, hogy mindig van a kiválasztott számok között kettő, melynek különbsége n-nél nagyobb, de $2n$-nél kisebb.

3. Legyen a λ szám $\frac{1}{2}$-nél nagyobb és 1-nél kisebb. Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalára rendre felmérjük a

$$AB_1 = \lambda \cdot BC, \qquad CB_1 = \lambda \cdot CA, \qquad AC_1 = \lambda \cdot AB$$

távolságot. Bizonyítandó, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög kerülete az ABC háromszög kerületének λ-szorosánál kisebb.

A Bolyai János Matematikai Társulat elnöksége által kiküldött versenybizottság, melynek tagjai Gallai Tibor, Kárteszi Ferenc, Surányi János, Vincze István és Hajós György előadó, 1952. november 20-án tartott ülésén egyhangúan a következő jelentést fogadta el:

„A versenyen résztvevőknek s a beadott dolgozatoknak száma több mint 50%-kal haladta meg az eddig legnépesebb múlt évi verseny megfelelő adatait. A bizottság örömmel állapítja meg ebből a matematikai tanulóversenyek iránti érdeklődés fokozódását.

Legkönnyebbnek az első feladat bizonyult, a másik két feladatra csak nagyon kevés jó megoldást adtak be a versenyzők. A második feladat szövegezése nem kifogástalan: a feladat szövegéből kimaradt, hogy a szereplő n egész szám 1-nél nagyobb. Ez a körülmény azonban a verseny során zavart nem okozott.

Kiemelkedik a beadott dolgozatok közül Kálmán Lajos és Kántor Sándor dolgozata. *Kálmán Lajos* a múlt tanévben a budapesti V. ker. Berzsenyi Dániel gimnáziumban érettségizett, *Somosi Ferenc* tanár tanítványa. Azzal emelkedik ki valamennyi versenyző közül, hogy egyedül az ő dolgozata tartalmazza két feladatnak hiánytalan megoldását. Az általa meg nem oldott második feladatnál is jól indul el, azonban okoskodását hibásan fejezi be. *Kántor Sándor* a debreceni református gimnáziumban a múlt tanévben a III. osztályt végezte, *Nagy Géza* tanár tanítványa. Dolgozata kiemelkedik logikus és tömör fogalmazásával. Az első feladatra két szép megoldást ad, a második feladat megoldásának leírását csak egy kis kihagyás zavarja. A harmadik feladattal nem foglalkozott. A bizottság az 1952. évi első *Kürschák József*-díjat megosztva Kálmán Lajosnak és Kántor Sándornak ítéli, s dolgozataikat $300-300$ forinttal jutalmazza.

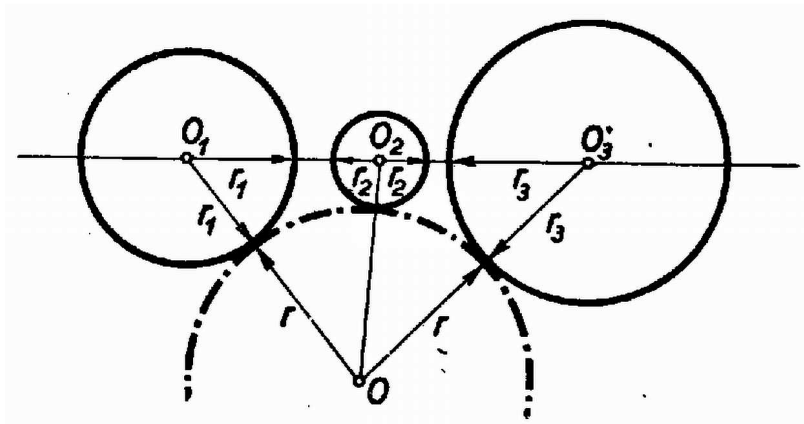
Második helyen Horváth Ákos és Nagy Tibor dolgozatát kell kiemelnünk. *Horváth Ákos* a múlt évben érettségizett a szentendrei ferences gimnáziumban, *Vigh Árpád* tanár tanítványa. Az első feladat hiánytalan megoldása mellett lényegében a második feladatot is megoldotta. Ez utóbbinál azonban okoskodása nem foglalkozik minden esettel, viszont elintézi azt az esetet, amelyik egyedül okoz komoly nehézséget. A harmadik feladattal nem foglalkozott. *Nagy Tibor* a múlt évben érettségizett a váci Sztáron Sándor gimnáziumban, *Gyaraki Ferenc* tanár tanítványa. Az első és harmadik feladatot oldotta meg, az elsőnél azonban a lehetséges esetek taglalása hiányos. A második feladatra beadott megoldása hibás. A bizottság az 1952. évi második *Kürschák József*-díjat megosztva Horváth Ákosnak és Nagy Tibornak ítéli, s munkájukat $200-200$ forinttal jutalmazza.

A többi dolgozat lényegében helyesen is csak legfeljebb egy feladatnak megoldását tartalmazza."

A verseny eredményének kihirdetésére Budapesten a Bolyai János Matematikai Társulat 1952. november 15-én tartott ülésén került sor. Ezen az ülésen a versenybizottság előadója ismertette a feladatok megoldásait. Az alábbiakban e megoldásokat közöljük.

1. *feladat.*

I. megoldás: Jelölje O_1, O_2, O_3 a három adott kör középpontját, s legyen közülük O_2 a másik kettő között. A három kör sugarát rendre r_1, r_2, r_3 jelöli. A negyedik kör középpontja és sugara legyen O és r.



1. ábra

A negyedik kör nem lehet egyik adott körnek sem a belsejében, mert akkor nem érinthetné a másik kettőt is. Nem kell foglalkoznunk avval az esettel sem, midőn a három adott körnek valamelyike a negyedik kört belülről érinti, mert ez esetben a negyedik kör sugara a belülről érintő kör sugaránál nagyobb, s így nem lehet a négy körsugár közül a legkisebb. Ezért csak avval az esettel foglalkozunk, amikor a negyedik kör kívülről érinti a három adott kört (1. ábra).

Az $OO_1O_3\Delta$ oldalaira

$$OO_1 + OO_3 > O_1O_3.$$

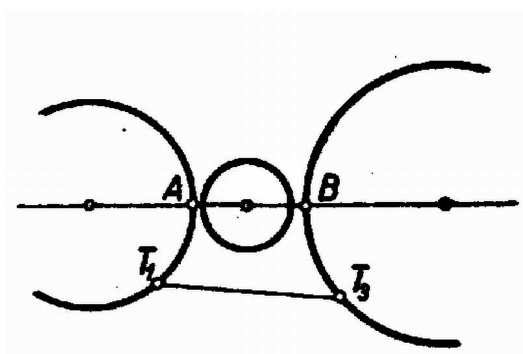
Minthogy a körök kívülről érintik egymást, $OO_1 = r + r_1$ és $OO_3 = r + r_3$. Mivel a három adott kör közül nincs kettőnek közös belső pontja, $O_1O_3 \geq r_1 + 2r_2 + r_3$, hiszen az O_1O_3 szakasz tartalmazza a két szélső kör sugarát s a középsőnek átmérőjét, s e sugarak és az átmérő egymást még részben sem fedik. Igaz ez akkor is, ha a középső kör érinti a két szélsőnek valamelyikét, vagy akár mindkettőt is. Az utóbbi esetben az egyenlőség jele érvényes.

Fenti egyenlőtlenségünk alapján tehát

$$r_1 + 2r + r_3 > r_1 + 2r_2 + r_3,$$

amiből $r > r_2$ adódik. Az r sugár tehát r_1, r_2, r_3 mindegyikénél kisebb nem lehet.

II. megoldás: Jelölje A és B a két szélső körnek egymáshoz legközelebb eső pontjait, tehát a centrális egyenesnek s a két szélső körnek egy-egy metszéspontját (2. ábra).



2. ábra

Minthogy az AB távolság a középső kör átmérőjét tartalmazza,

$$AB \geq 2r_2.$$

Jelölje T_1 és T_3 a negyedik körnek s a két szélső körnek közös pontjait. Minthogy T_1T_3 a negyedik körnek húrja,

$$2r \geq T_1T_3.$$

A és B megválasztásából viszont következik, hogy

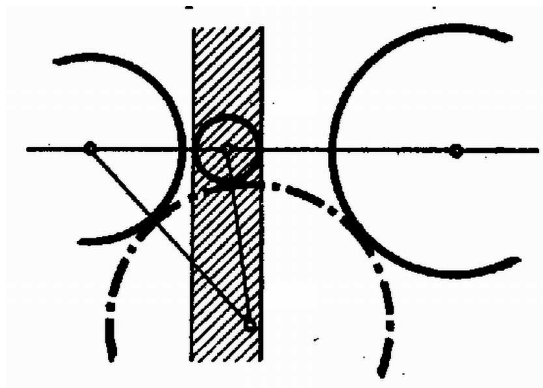
$$T_1T_3 \geq AB.$$

Egyenlőtlenségeink összevetéséből

$$2r \geq 2r_2,$$

azaz $r \geq r_2$ adódik. Ez pedig a feladat állítását igazolja.

III. megoldás: Emeljünk a centrális egyenesnek s a középső körnek metszéspontjaiban merőlegeseket a centrálisra (3. ábra).

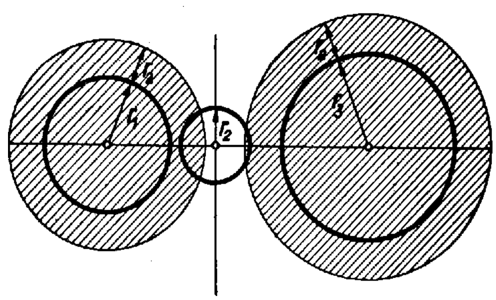


3. ábra

E két párhuzamos egyenes egy síksávot fog közre. A három adott kör közül a két szélső ennek a sávnak más-más oldalán van. Minthogy a negyedik körnek van közös pontja mindkét szélső körrel, azért tudjuk, hogy a negyedik kör a sávnak mindkét partját eléri, átmérője tehát a sáv szélességénél, sugara pedig annak felénél, vagyis a középső kör sugaránál kisebb nem lehet.

IV. megoldás: Keressük az olyan negyedik körnek középpontját, amelyiknek van a két szélső körrel egy-egy közös pontja, s amelyiknek sugara a középső kör sugaránál kisebb.

Ha a két szélső kör sugarát a középső kör sugarával megnöveljük, olyan köröket kapunk, amelyeknek mindegyike belsejében kell, hogy tartalmazza a kívánt tulajdonságú negyedik körnek középpontját (4. ábra).

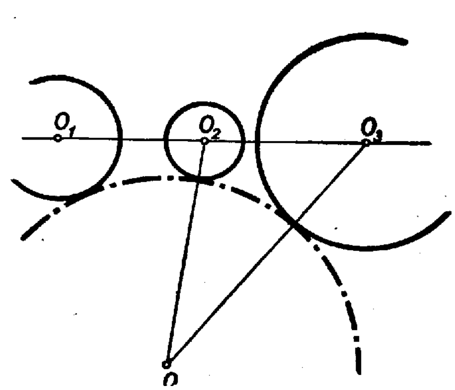


4. ábra

Hiszen e körök valamelyikén kívül lévő pont körül r_2-nél kisebb sugárral írt kör nem éri a megfelelő szélső kört.

Emeljünk a középső kör középpontjában merőlegest a centrális egyenesre. Minthogy éppen a középső kör sugarával növeltük az előbb a sugarakat, azért a megnövelt körök a most szerkesztett merőleges egyenesnek más-más oldalán vannak. A megnövelt köröknek tehát nincs közös belső pontjuk, s így kívánt tulajdonságú negyedik kör sincs.

V. megoldás: Kössük össze a negyedik kör O középpontját a középső kör O_2 középpontjával. Az $OO_2O_1\sphericalangle$ és $OO_2O_3\sphericalangle$ összege $180°$, s így mindkettő nem lehet $90°$-nál kisebb (5. ábra).



5. ábra

Legyen pl. $OO_2O_3\sphericalangle \geq 90°$. Ekkor az $OO_2O_3\Delta$-ben ez a legnagyobb szög, s ezért OO_3 a háromszög legnagyobb oldala, tehát

$$OO_3 > O_2O_3.$$

Minthogy az O és O_3 középpontú köröknek van közös pontjuk, $OO_3 \leq r + r_3$. Mivel az O_2 és O_3 középpontú köröknek nincs közös belső pontjuk, $O_2O_3 \geq r_2 + r_3$. Így tehát

$$r + r_3 > r_2 + r_3,$$

azaz $r > r_2$, tehát r nem lehet r_1, r_2, r_3 mindegyikénél kisebb.

Megjegyzések: 1. Végső következtetésünk mindegyik megoldásnál az volt, hogy r nem lehet a legkisebb a négy körsugár közül, azaz nem lehet a másik három mindegyikénél kisebb. Megoldásaink azt is bizonyítják, hogy r nem lehet r_2-nél kisebb sem.

2. Az is igaz, hogy r nem lehet a négy körsugár közül még a legkisebbek között sem, azaz van a másik három sugár között r-nél kisebb. Sőt bizonyos, hogy r_2 kisebb r-nél. Ezt az első és ötödik megoldás ki is mondja. A többi három megoldás okoskodása csekély toldással ugyancsak elvezet ehhez az eredményhez.

3. Az első megoldás használta csak ki azt, hogy a negyedik kör érinti a két szélsőt. A többi arra épített, hogy a negyedik körnek van közös pontja a szélső körökkel, tehát azt is megengedte, hogy a negyedik kör messe a szélsőket. Az első megoldás lényegtelen módosítással ugyanilyenné alakítható.

4. Csak az első és ötödik megoldás használta ki valamennyire azt, hogy a negyedik kör érinti a középsőt. Ez abban nyilvánult, hogy e megoldások OO_1O_3, ill. OO_2O_3 háromszögről szóltak, tehát feltételezték hogy O nincs rajt a centrális egyenesen. Ez valóban nem következhetik be, ha a negyedik körnek van közös pontja a szélső körökkel, és érinti a középsőt. Így érthető az is, hogy éppen ezt a két megoldást kellett 2. megjegyzésünkben kiemelnünk.

5. A második megoldásból kiolvashatjuk, hogy $r = r_2$ csak akkor állhat fenn, ha mindenütt az egyenlőség jele volt érvényes: ha tehát AB átmérője a középső körnek, ha T_1T_3 átmérője a negyedik körnek, ha továbbá T_1T_3 és AB azonos. Ez pedig azt jelenti, hogy a középső kör érinti a két szélsőt, és a negyedik körrel azonos. Ugyanehhez az eredményhez a többi megoldás alapján is eljuthatunk.

6. Megjegyzéseinket összefoglalva a feladat állításának következő általánosítását mondhatjuk ki: *Három kör közül kettőnek-kettőnek nincs közös belső pontja, s középpontjaik egy egyenesen vannak; ha egy negyedik körnek van közös pontja e három kör közül a két szélsőnek mindegyikével, akkor e negyedik körnek sugara nem lehet a középső kör sugaránál kisebb, és egyenlő is csak akkor lehet azzal, ha a középső kör érinti a két szélsőt, s ha továbbá a negyedik kör a középső körrel azonos.*

2. feladat.

I. megoldás: Az első $3n$ egész számot három csoportba osztjuk:

A) $1, 2, \ldots, n$;

B) $n+1,\ n+2, \ldots, 2n$;

C) $2n+1, 2n+2, \ldots, 3n$.

Minthogy $n+2$ számot választunk ki, ezeket mind nem választhatjuk egyetlen csoportból.

Ha a számokat csak az A és B, vagy pedig csak a B és C csoportokból választjuk, akkor a kiválasztott számok legkisebbikének és legnagyobbikának különbsége n-nél nagyobb, hiszen közöttük van a többi n kiválasztott szám, viszont $2n$-nél kisebb, hiszen a csoportok legszélső elemeinek különbsége is csak $2n-1$.

Ha a számokat az A és C csoportból választjuk, akkor az A csoportból kiválasztott legnagyobb s a C csoportból kiválasztott legkisebb számnak különbsége n-nél nagyobb, hiszen e két csoport legközelebbi elemeinek különbsége is $n+1$. Ugyanannak a két kiválasztott számnak a különbsége azonban $2n$-nél kisebb is, mert közöttük csak ki nem választott számok vannak, s valamennyi ki nem választottnak száma is csak $3n-(n+2) = 2n-2$.

Foglalkozzunk végül avval az esettel, amikor mindhárom csoportból választjuk a számokat. Legyenek a, b, c rendre az A, B, C csoportba tartozó kiválasztott számok. Feltehetjük, hogy a $b-a$ és $c-b$ különbségeknek nem mindegyike n, hiszen ellenkező esetben az a, b, c számok valamelyike helyett egy ugyanabba a csoportba tartozó másik kiválasztott számot tekinthetnénk. Ez lehetséges, mert $n > 1$ feltevés mellett $n+2 > 3$, tehát valamelyik csoportból több számnak kell szerepelnie a kiválasztottak között.

Nem kell foglalkoznunk avval az esettel sem, amidőn a $b-a$ és $c-b$ különbségeknek valamelyike n-nél nagyobb, hiszen e különbségek $2n$-nél kisebbek, minthogy az A és B, valamint a B és C csoportok legtávolabbi elemeinek különbsége is csak $2n-1$.

Így csak annak az esetnek vizsgálata marad hátra, amidőn a $b-a$ és $c-b$ különbségeknek egyike sem nagyobb n-nél, de legalább az egyike kisebb. Ebben az esetben azonban $c-a$, mint e különbségeknek összege, $2n$-nél kisebb, s másrészt eleve n-nél nagyobb, hiszen a B csoportnak mind az n eleme a és c között van.

Olyan utasítást adtunk tehát, amely minden esetben elvezet egy kívánt tulajdonságú számpárhoz.

II. megoldás: Két kiválasztott számot szomszédosnak mondunk, ha a közöttük lévő számoknak egyike sem szerepel a kiválasztottak között. Két szomszédos kiválasztott számnak különbsége nem lehet $2n$ vagy még több, mert szomszédos kiválasztott számok között ki nem választott számok vannak, és csak $3n-(n+2) = 2n-2$ ki nem választott szám van. Ha a kiválasztott számok közül két szomszédosnak különbsége $2n$-nél kisebb, de n-nél nagyobb, akkor e két szám a feladat kívánalmát kielégíti. Így tehát csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor a kiválasztott számok közül bármely két szomszédosnak különbsége legfeljebb n.

Legyen a a kiválasztott számok legkisebbike. Ha szerepel a kiválasztott számok között olyan, amelyik $(a+n)$-nél nagyobb s $(a+2n)$-nél kisebb, akkor a és ez a szám kielégíti a feladat kívánalmát. Ha viszont a mondott számoknak egyike sem szerepel a kiválasztottak között, akkor $a+n$ és $a+2n$ szükségképpen szerepel közöttük, mert különben a mondott számokat közrefogó két szomszédos kiválasztott számnak különbsége feltevésünkkel ellentétben n-nél nagyobb volna. Bizonyos, hogy van két ilyen közrefogó szomszédos szám, hiszen maga a a mondott számoknál kisebb, s nagyobbnak is kell lennie a kiválasztott számok között, minthogy a-tól kezdve $(a+n)$-ig bezárólag összesen csak $n+1$ szám van.

Ha viszont a, $a+n$ és $a+2n$ szerepel a kiválasztott számok között, akkor bármely negyedik szám e három valamelyikével együtt megfelel a feladat kívánalmának. Hiszen a-nál kisebb szám nincs a kiválasztottak között, az a-nál nagyobb és $(a+n)$-nél kisebb számoknak $(a+2n)$-nel alkotott különbségük, az $(a+n)$-nél nagyobb és $(a+2n)$-nél kisebb számoknak a-val alkotott különbségük, az $(a+2n)$-nél nagyobb és $3n$-nél nem nagyobb számoknak pedig $(a+n)$-nel alkotott különbségük n-nél nagyobb s egyben $2n$-nél kisebb. Minthogy pedig $n>1$ esetben $n+2>3$, található a felsorolt háromtól különböző negyedik kiválasztott szám. Így tehát minden esetben eljutottunk a feladat kívánalmát kielégítő számpárhoz.

III. megoldás: Ha a kiválasztott számok között $3n$ nem szerepel, akkor mindegyik kiválasztott számot megnövelhetjük ugyanannyival úgy, hogy $3n$ legyen a kapott számok legnagyobbika. Minthogy e növelés a számok különbségeit nem változtatja meg, elegendő avval az esettel foglalkoznunk, midőn $3n$ szerepel a kiválasztott számok között. E feltevés mellett a következőképpen okoskodunk:

Ha az $n+1, n+2, \ldots, 2n-1$ számok egyike szerepel a kiválasztottak között, úgy ennek és $3n$-nek különbsége n-nél nagyobb, de $2n$-nél kisebb.

Ha viszont a mondott számok egyike sem szerepel, akkor az

$$1, 2n; 2, 2n+1; 3, 2n+2; \ldots; n, 3n-1$$

számpárok elemei közül kell további $n+1$ darabot kiválasztanunk. E kiválasztás csak úgy lehetséges, hogy valamelyik számpárnak mindkét elemét kiválasztjuk, hiszen összesen csak n számpár van. Így tehát van a kiválasztott számok között kettő, melyeknek különbsége $2n-1$, vagyis $2n$-nél kisebb s egyben n-nél nagyobb, hiszen $n>1$ feltevés mellett $n<2n-1$.

IV. megoldás: Helyezzük el az első $3n$ természetes számot egy kör kerületén növekvő rendben s egyenlő közökben. Az óralap szemlélteti ezt az elhelyezést az $n=4$ esetben.

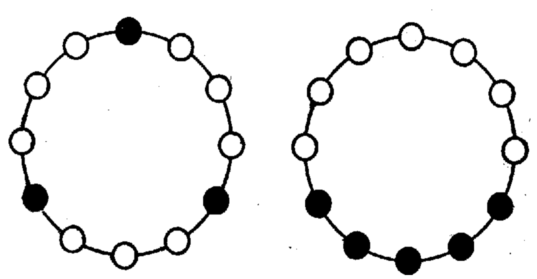
Két szám akkor elégíti ki a feladat kívánalmát, ha a kisebbiktől növekvő számok irányában haladó, s a nagyobbikhoz vezető körívnek hossza harmadkörnél nagyobb s a kör kétharmadánál kisebb. Ez a megkötés azonban egy körívre s az azt teljes körré kiegészítő körívre csak egyszerre teljesülhet, és ha két egymást teljes körré kiegészítő körívnek mindegyike nagyobb a harmadkörnél, akkor már eleve kisebbek a kör kétharmadánál. Így tehát két szám akkor elégíti ki a feladat kívánalmát, ha a két számot összekötő mindkét körív nagyobb a harmadkörnél.

Meggondolásaink alapján a feladatnak a következő új alakot adhatjuk: *Egy kör kerületén egyenlő közökkel* $3n$ *pont helyezkedik el, s ezek közül kiválasztunk* $n+2$ *darabot. Bizonyítandó, hogy mindig van a kiválasztott pontok között kettő, melyeket két, a harmadkörnél nagyobb körív köt össze.*

Vizsgáljuk, hogyan lehet a $3n$ pont közül egyeseket kiválasztani anélkül, hogy volna közöttük kettő, melyeket két, a harmadkörnél hosszabb körív köt össze. Ez a tilalom akként is szövegezhető, hogy a kiválasztott pontokkal szemben elhelyezkedő harmadkörívek belsejéből nem szabad pontot kiválasztanunk.

Nevezzük szabad körívnek az olyat, amelyet kiválasztott pontok határolnak, s amelyiknek belsejében nincs kiválasztott pont. A tilalom előbbi megfogalmazása szerint kell lennie legalább harmadkör-hosszúságú szabad körívnek. Viszont ugyancsak a tilalom szerint nem szabad harmadkörnél hosszabb s a kör kétharmadánál rövidebb szabad körívnek lennie, hiszen egy ilyennek végpontjai áthágják a tilalmat. Megengedett kiválasztásoknál tehát csak a következő két eset lehetséges: a szabad körívek maximuma vagy éppen harmadkörív, vagy pedig a kör két harmadát is eléri.

Ha a legnagyobb szabad körív harmadkör, akkor csak 3 kiválasztott pont szerepelhet (6. ábra).



6. ábra

Ilyenkor ugyanis bizonyosan van egy szabad harmadkörív. Ennek végpontjai, mint kiválasztott pontok, a kiegészítő kétharmadív belső pontjainak kiválasztását is tiltják, egyedül e kétharmadív középpontjának kiválasztását nem. Ennek a középpontnak kell is szerepelnie a kiválasztott pontok között, mert különben nem harmadkör volna a szabad körívek legnagyobbika.

Ha viszont a legnagyobb szabad körív a körnek kétharmada, vagy még nagyobb, akkor a kiválasztott pontok egy harmadkörön helyezkednek el, ennek végpontjait is beleértve. Minthogy egy harmadköríven végpontjaival együtt $n+1$ pont van, ilyenkor legfeljebb csak $n+1$ kiválasztott pont szerepelhet. Akár mind e pontokat kiválaszthatjuk, a tilalmat akkor sem hágjuk át.

Mivel $n+2$ nagyobb $(n+1)$-nél és $n > 1$ feltevés mellett 3-nál is, azért $n+2$ pontot nem lehet a tilalom áthágása nélkül kiválasztani.

Megjegyzés: Könnyű előző megoldásainkat is átfogalmazni körön elhelyezkedő számokra. Ezáltal azoknak tartalma is szemléletesebbé válik. Ezt azonban az olvasóra hagyjuk.

Megoldásunk a feladat állításán túlmenően a következő eredményhez is elvezet: Minden megengedett kiválasztásnál: 1) vagy három a, $a+n$, $a+2n$ alakú szám szerepel, 2) vagy $n+1$ egymást követő szám szerepel, 3) vagy együttesen $n+1$ olyan szám szerepel, amelyeknek egyik csoportja 1-hez csatlakozó s egymást követő, másik csoportja $3n$-hez csatlakozó s egymást követő számokat tartalmaz, 4) vagy pedig csak egyesek szerepelnek az előző két eset valamelyikében megadott számok közül.

V. megoldás: A feladatnak $n = 60$ esetben a következő tréfás fogalmazást adhatjuk: Egy könyvtárt déli 12-kor nyitnak és délután 3 órakor becsuknak. A könyvtárba csak pontosan kerek percidőkkor lehet belépni: első ízben pontosan 12-kor, utóljára 2 óra 59 perckor. Egyszerre csak egy ember léphet a könyvtárba. Aki a könyvtárba lép, belépése után pontosan egy órával elalszik s pontosan egy órát alszik, hacsak a könyvtár zárása ebben meg nem akadályozza. Senkit alvás *közben* a könyvtárba lépéssel zavarni nem szabad. Bizonyítandó, hogy ilyen különös előírások mellett egy napon nem járhat 62 ember a könyvtárban.

Felesleges volna részletezni, hogy ez valóban a feladat átírása.

Ha a könyvtár kapusa az első látogató érkezésekor a könyvtár óráját déli 12-re állítja vissza, akkor nyilván csak azt teszi lehetővé, hogy esetleg még többen látogathassák aznap a könyvtárt. Feltehetjük tehát, hogy az első látogató pontosan 12-kor érkezik. A következőkben három esetet különböztetünk meg.

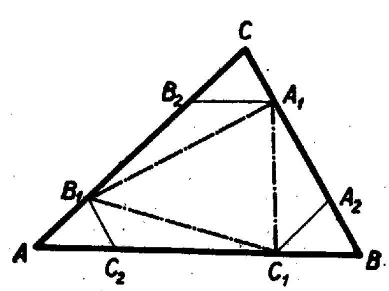
Először avval az esettel foglalkozunk, hogy pontosan 1 órakor és pontosan 2 órakor is érkezik egy-egy látogató. Ekkor bizonyos, hogy többen nem is járnak a könyvtárban. Hiszen 12 és 1 között nem érkezhetik senki sem, mert az 2-kor biztosan aludna, s így álmát megzavarnák. Viszont 1 és 2, valamint 2 és 3 között azért nem jöhet be senki sem, mert akkor alszik a 12-kor érkező, ill. az 1-kor érkező látogató. Ebben az esetben tehát 3 látogató van.

Másodszor feltesszük, hogy pontosan 1 órakor érkezik látogató, de 2-kor nem. Ekkor bizonyos, hogy 1 óra után senki sem érkezik. Ugyanis 1 és 2 között a 12-kor érkező, viszont 2 és 3 között az 1-kor érkező látogató alszik. Ebben az esetben tehát minden látogató 12-től kezdve 1 óráig bezárólag érkezik, s így legfeljebb 61 látogató van.

Végül harmadszor feltesszük hogy pontosan 1 órakor nem érkezik látogató. Szemeljük ki ekkor azt a látogatót, aki utoljára érkezett 1 óra előtt (lehet, hogy az első látogatót kell így kiszemelnünk). A kiszemelt látogató érkezésétől számított kétórás időközön *belül* újabb látogató nem érkezhet, hiszen ez csak elalvása előtt volna lehetséges, viszont sem érkezésétől 1 óráig, sem 1 órakor nem érkezik senki sem, és 1 órától a kiszemelt látogató elalvásáig terjedő időben (ha ugyan nem az első látogatót magát szemeltük ki), már alszik az első látogató. Ezek szerint a mondott két órás időközön belül 119 belépési lehetőség kihasználatlanul kell, hogy maradjon, a látogatók a megengedett 180 lehetőségből csak a többit használhatták ki. Ebben az esetben tehát ugyancsak legfeljebb 61 látogató van. Egybevetve megállapítjuk, hogy mindenképpen csak legfeljebb 61 ember járhat egy napon a könyvtárban. Nyilván helyes marad okoskodásunk akkor is, ha az órát nem 60, hanem n percre osztjuk fel. Egyedül az lényeges, hogy a 61 helyébe lépő $n+1$ ne legyen 3-nál kisebb, vagyis hogy az $n > 1$ feltétel teljesüljön.

3. feladat.

I. megoldás: Húzzunk párhuzamosakat az A_1, B_1, C_1 pontokon át rendre az AB, BC, CA oldalakkal (7. ábra). E párhuzamosak a CA, AB, BC oldalakat rendre B_2, C_2, A_2 pontokban metszik. Az így kapott AC_2B_1, C_1BA_2, B_2A_1C háromszögek oldalaik párhuzamossága miatt hasonlók az $ABC\Delta$-höz.



7. ábra

E háromszögek egymással egybevágók, ugyanis

$$A_1C = (1-\lambda)\cdot BC, \qquad B_1A = (1-\lambda)\cdot CA, \qquad C_1B = (1-\lambda)\cdot AB$$

miatt egy-egy oldaluk az eredeti háromszög megfelelő oldalának ugyanannyiszorosa. Az egybevágóságból következik, hogy

$$A_1B_2 = C_2A, \qquad B_1C_2 = A_2B, \qquad C_1A_2 = B_2C.$$

Ebből pedig az adódik, hogy az $A_1B_2B_1C_2C_1A_2$ hatszög kerülete az AC_1, BA_1, CB_1 távolságok összegével, vagyis az eredeti háromszög oldalai λ-szorosainak összegével, tehát az $ABC\Delta$ kerületének λ-szorosával egyenlő.

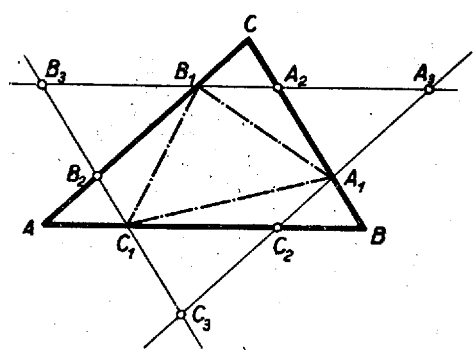
A feladat állítása most már abból következik, hogy az $A_1B_1C_1\Delta$ kerülete a szerepeltetett hatszög kerületénél kisebb. Hiszen e háromszög egy-egy oldala kisebb a hatszög két-két oldalának összegénél.

Megjegyzés: Megoldásunk kihasználta, hogy a szereplő hatszög csúcsai mind különböző pontok. Ez nem következik be, ha $\lambda = \frac{1}{2}$, amikor is $A_1 \equiv A_2$, $B_1 \equiv B_2$, $C_1 \equiv C_2$, s akkor sem, ha $\lambda = 1$, amikor viszont $A_1 \equiv B_2$, $B_1 \equiv C_2$, $C_1 \equiv A_2$. A feladat állítása sem helyes ebben a két esetben, hiszen az $A_1B_1C_1\Delta$ kerülete mindkét esetben éppen egyenlő az $ABC\Delta$ kerületének λ-szorosával.

Kihasználta okoskodásunk azt a tényt is, hogy a C_2, A_2, B_2 pontok rendre az AC_1, BA_1, CB_1 távolságok belsejében vannak. Hiszen különben nem volna pl. a hatszög A_1B_2 és C_2C_1 oldalának összege az AC_1 távolsággal egyenlő. A mondott tény bekövetkezése annak következménye, hogy $\lambda > \frac{1}{2}$, azaz $1 - \lambda < \lambda$. Ugyanis pl.

$$AC_2 = (1 - \lambda) \cdot AB < \lambda \cdot AB = AC_1.$$

Nem is igaz a feladat állítása, ha $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Ezt a következőképpen bizonyítjuk: Az A_1, B_1, C_1 pontokon át párhuzamosakat húzunk rendre a CA, AB, BC oldalakkal (8. ábra).



8. ábra

E párhuzamosak az AB, BC, CA oldalakat rendre C_2, A_2, B_2 pontokban metszik, s együttesen az $A_3B_3C_3\Delta$-et határolják. Az AC_1B_2, C_2BA_1, B_1A_2C háromszögek oldalaik párhuzamossága miatt hasonlók az eredeti háromszöghöz, s egymással egybevágók is, mert mindegyiküknek egy-egy oldala az $ABC\Delta$ megfelelő oldalának λ-szorosa. Így tehát

$$B_1A_2 = \lambda \cdot AB, \qquad C_1B_2 = \lambda \cdot BC, \qquad A_1C_2 = \lambda \cdot CA.$$

Tudjuk most azt is, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok rendre a BA_1, CB_1, AC_1 távolságokon kívül vannak, hogy tehát az $A_3B_3C_3\Delta$ csúcsai az eredeti háromszögön kívül helyezkednek el. Az előbbi mintára belátjuk, hogy az $A_3A_2A_1$, $B_1B_3B_2$, $C_2C_1C_3$ háromszögek hasonlók az eredeti háromszöghöz, s egymással egybevágók, mert A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 oldalaik az $ABC\Delta$ megfelelő oldalainak $(1 - 2\lambda)$-szorosai. Így tehát

$$A_2A_3 = B_3B_1, \qquad B_2B_3 = C_3C_1, \qquad C_2C_3 = A_3A_1.$$

Az $A_1B_1A_3$, $B_1C_1B_3$, $C_1A_1C_3$ háromszögek egy-egy oldalára felírva, hogy a másik két oldal különbségénél nagyobb:

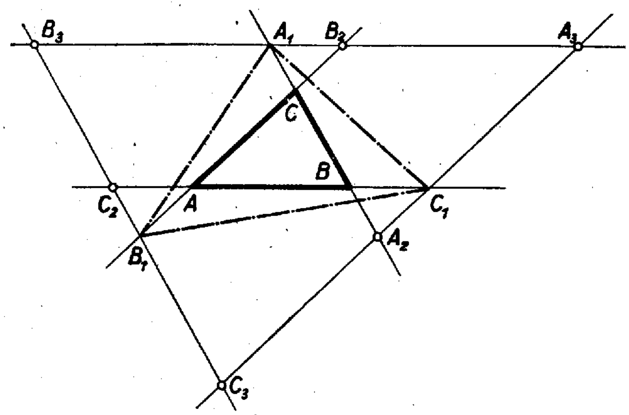
$$\begin{aligned} A_1B_1 &> B_1A_2 + A_2A_3 - A_3A_1, \\ B_1C_1 &> C_1B_2 + B_2B_3 - B_3B_1, \\ C_1A_1 &> A_1C_2 + C_2C_3 - C_3C_1. \end{aligned}$$

Ezeknek az egyenlőtlenségeknek összege a fenti egyenlőségek figyelembe vételével:

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 > B_1A_2 + C_1B_2 + A_1C_2.$$

Ez pedig fentebbi megállapításunk értelmében éppen azt mondja ki, hogy az $A_1B_1C_1\Delta$ kerülete az $ABC\Delta$ kerületének λ-szorosánál nagyobb.

Akkor sem teljesül a feladat állítása, ha $\lambda > 1$, mikor is az A_1, B_1, C_1 pontok az $ABC\Delta$ oldalainak meghosszabbítására kerülnek. Ezt a következőképpen látjuk be: Az A_1, B_1 C_1 pontokon át párhuzamosakat húzunk rendre az AB, BC, CA oldalakkal (9. ábra).



9. ábra

E párhuzamosak a CA, AB, BC oldalakat rendre B_2, C_2, A_2 pontokban metszik, s együttesen az $A_3B_3C_3\Delta$-et határolják. Az $AC_2B_1, C_1BA_2, B_2A_1C$ háromszögek oldalaik párhuzamossága miatt hasonlók az eredeti háromszöghöz, s egymással egybevágók, mert egy-egy oldaluk az $ABC\Delta$ megfelelő oldalának $(\lambda-1)$-szerese. Ebből az egybevágóságból következik, hogy $A_2B = CA_1$, $B_2C = AB_1$, $C_2A = BC_1$, hogy tehát a CA_2, AB_2, BC_2 távolságok is λ-szorosai az $ABC\Delta$ oldalainak. Minthogy $AB_2A_3C_1$, $BC_2B_3A_1$ és $CA_2C_3B_1$ paralelogramma, megállapításainkból következik, hogy az $A_3B_3C_3\Delta$ oldalait az ezeken elhelyezkedő két-két pont olyan három–három távolságra darabolja, amelyek az $ABC\Delta$ egy-egy oldalának sorjában λ-szorosai, $(\lambda-1)$-szeresei és λ-szorosai. Így tehát az $A_1B_1C_1\Delta$ csúcsai úgy helyezkednek el az $A_3B_3C_3\Delta$ oldalain, hogy

$$B_3A_1 : B_3A_3 = C_3B_1 : C_3B_3 = A_3C_1 : A_3C_3,$$

hiszen ezeknek az arányoknak mindegyike a $\lambda : (3\lambda - 1)$ aránnyal egyenlő. Minthogy ennek az aránynak értéke $\lambda > 1$ folytán $\frac{1}{2}$-nél kisebb, azért előzőleg bizonyított állításunk e háromszögekre teljesül. Tudjuk tehát, hogy az $A_1B_1C_1\Delta$ kerülete nagyobb a B_3A_1, C_3B_1, A_3C_1 távolságok összegénél, azaz az $ABC\Delta$ kerületének λ-szorosánál.

Megjegyezhetjük még, hogy $\lambda \le 0$ esetben a feladat állítása eleve nem teljesülhet, hiszen egy háromszög kerülete csak pozitív lehet.

Összefoglalva az e megjegyzésben mondottakat megállapítjuk, hogy a feladat $1/2 < \lambda < 1$ megkötése lényeges. Ha e megkötés nem teljesül, a feladat állítása soha sem helyes.

II. megoldás: Ha a γ_1 és γ_2 szög 0-nál nagyobb és 180°-nál kisebb, akkor

$$\sin(\gamma_1 + \gamma_2) < \sin\gamma_1 + \sin\gamma_2,$$

hiszen a baloldalt növeljük, ha azt $\sin\gamma_1\cos\gamma_2 + \cos\gamma_1\sin\gamma_2$ alakban írva a pozitív sinus-tényezők cosinus-együtthatóinak helyébe azoknál nagyobb 1-et írunk.

Ha továbbá egy ugyancsak 0-nál nagyobb és 180°-nál kisebb δ szöget szerepeltetünk, akkor az előző egyenlőtlenséget a pozitív $\sin\delta$-val szorozva

$$\sin(\delta + \gamma_1)\sin\gamma_2 + \sin(\delta - \gamma_2)\sin\gamma_1 < \sin\delta\,(\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2)$$

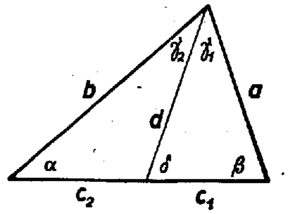
adódik. Ugyanis (a szereplő szögösszegek és szögkülönbségek függvényeit a tagok függvényeivel fejezve ki)

$$\sin\delta\sin(\gamma_1 + \gamma_2) = \sin(\delta + \gamma_1)\sin\gamma_2 + \sin(\delta - \gamma_2)\sin\gamma_1$$

azonosan teljesül. Így tehát utolsó egyenlőtlenségünket a pozitív $\sin\gamma_1\sin\gamma_2$ szorzattal osztva

$$\frac{\sin(\delta + \gamma_1)}{\sin\gamma_1} + \frac{\sin(\delta - \gamma_2)}{\sin\gamma_2} < \frac{\sin\delta}{\sin\gamma_1} + \frac{\sin\delta}{\sin\gamma_2}.$$

Tekintsünk egy a, b, c oldalú háromszöget, melyet egy d hosszúságú távolság egy a, d, c_1 és egy b, d, c_2 oldalú háromszögre vág (10. ábra).



10. ábra

Ezekre fennáll a

$$\frac{d}{c_1}+\frac{d}{c_2}<\frac{a}{c_1}+\frac{b}{c_2}$$

egyenlőtlenség. Ugyanis a sinus-tétel szerint ez az előbbi egyenlőtlenséggel azonos, ha ábránk szögjelöléseit használjuk, hiszen e szögekre

$$a=\delta-\gamma_2,\ \beta=\pi-(\delta+\gamma_1).$$

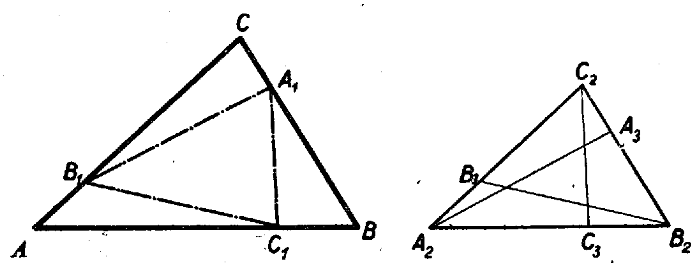
Ha utolsó egyenlőtlenségünket $\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)$-vel osztjuk és a $\mu=\frac{c_1}{c_1+c_2}$ jelölést használjuk, akkor a

$$d<\mu b+(1-\mu)a$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Tekintsünk egy $A_2B_2C_2\Delta$-et (11. ábra), melynek oldalain az A_3, B_3, C_3 pontok úgy helyezkednek el, hogy

$$A_3C_2:B_2C_2=B_3A_2:C_2A_2=C_3B_2:A_2B_2.$$



11. ábra

Állítjuk, hogy az A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 távolságok összege az $A_3B_3C_3$ kerületénél kisebb. Ha ugyanis a fenti arányok közös értékét μ-vel jelöljük, akkor előző megállapításunk értelmében

$$\begin{aligned}A_2A_3&<\mu A_2B_2+(1-\mu)C_2A_2,\\ B_2B_3&<\mu B_2C_2+(1-\mu)A_2B_2,\\ C_2C_3&<\mu C_2A_2+(1-\mu)B_2C_2.\end{aligned}$$

Ezeknek az egyenlőtlenségeknek összege éppen állításunkat adja.

Tekintsük végül magát a feladatban leírt alakzatot. Legyen az $A_2B_2C_2\Delta$ hasonló az $ABC\Delta$-höz, s oldalai legyenek az $ABC\Delta$ oldalainak λ-szorosai, tehát az A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 oldalak rendre az AC_1, BA_1, CB_1 távolságokkal egyenlők. Ezekre az oldalakra felmérjük a $C_2A_3=CA_1$, $A_2B_3=AB_1$, $B_2C_2=BC_1$ távolságokat, amit $1-\lambda<\lambda$ miatt megtehetünk. Ezzel biztosítottuk, hogy az $A_2C_2A_3$, $B_2A_2B_3$, $C_2B_2C_3$ háromszögek rendre egybevágók a B_1CA_1, C_1AB_1, A_1BC_1 háromszögekkel, s így az A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 távolságok összege az $A_1B_1C_1\Delta$ kerületével egyenlő. Minthogy az A_3, B_3, C_3 pontok felvételénél az $A_2B_2C_2\Delta$ oldalaira ezeknek az oldalaknak ugyanannyiszorosát, t. i. $\mu=\frac{1-\lambda}{\lambda}$-szorosát mértük fel, teljesülnek előzőleg bizonyított állításunknak feltételei. E szerint tehát az A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 távolságok összege az $A_2B_2C_2\Delta$ kerületénél, vagyis az $A_1B_1C_1\Delta$ kerülete az $ABC\Delta$ kerületének λ-szorosánál kisebb.

Megjegyzés: Nem nehéz e második megoldást úgy alakítani, hogy az $\frac{1}{2}<\lambda<1$ kirovás szükségessége is kiolvasható legyen. Elegendő ugyanis a megoldásban szereplő első egyenlőtlenséghez hozzáfűzni, hogy amennyiben a γ_1 és γ_2 szögek -180° és 180° közé esnek, s összegük pozitív, úgy ez az első egyenlőtlenség csak akkor teljesül, ha a γ_1 és γ_2 szögek mindegyike pozitív. Ebből a megállapításból kiindulva megoldásunk gondolatmenetének változatlan megtartása (s előjeles távolságok és szögek használata) mellett a mondott eredményhez juthatunk, ezt azonban itt nem részletezzük.