Néhány szó az eseményekről

Tekintsünk egy játékkockát. Nevezzük a kocka minden egyes feldobását egy-egy kísérletnek. A kísérlet eredménye nyilván valamilyen eseménynek a bekövetkezése lesz. Milyen események lehetnek egy kocka feldobásának az eredményei? Sokan azt mondanák, hagy a lehetséges, bekövetkezhető események száma 6 és pedig ez a 6 nem más, mint az, hogy a kockadobás eredménye az 1, 2, 3, 4, 5 illetve a 6-os szám. Ez az álláspont nem helyes. Ugyanis nyilvánvaló, hogy nem rekeszthetjük ki a kockadobással kapcsolatos események közül például a következő eseményeket: páros számot dobunk, páratlan számot dobunk, 4-nél kevesebbet dobunk stb. Mindenesetre az előbbi és a most említett események között van különbség. Ez a különbség abban áll, hogy az előbb említett események mind csak egyféleképpen valósulhatnak meg. Az az esemény, hogy 3-at dobunk, csak egyféleképpen a 3-as dobása által következhet be, míg az az esemény, hogy páros számot dobunk, háromféleképpen is megvalósulhat és pedig a 2-es, 4-es vagy a 6-os dobása által. Ennek a különbségnek az észrevétele arra indít bennünket, hogy külön elnevezést adjunk az események e két típusának. Nevezzük pedig azokat az eseményeket, amelyek csupán abból állanak, hogy egy meghatározott számot (pl. 3-at) dobunk a kockával *elemi események*nek, a többit *összetett események*nek.

Általában, ha valamilyen kísérletről van szó (kockadobás, pénzdobás, egy egyenes szakasz találomra való kettévágása stb.), a kísérlet különböző kimeneteleit, amelyek tehát csak egyféleképpen valósulhatnak meg elemi eseményeknek, a többieket pedig, amelyek többféleképpen is megvalósulhatnak, összetett eseményeknek nevezzük. Vannak olyan kísérletek, amelyeknél az elemi események száma végtelen. Ide tartozik az a kísérlet, amely abból áll, hogy egy meghatározott egyenes szakaszt találomra két részre osztunk. Nyilvánvaló, hogy egy ilyen felosztás végtelen sok különböző eredményre vezethet. Mi a továbbiak folyamán egyelőre arra az esetre szorítkozunk, amelynél *az elemi események csak véges számban vannak.*

Még egy megszorítást teszünk. *Feltesszük, hogy elemi eseményeink közül egyik sincs előnyben a többivel szemben, vagyis, hagy ezek egyenlő eséllyel következhetnek be.* Ezzel a tulajdonsággal rendelkezik pl. a kockadobás, ha a kockánk hibátlan és az anyaga egyenletes, a pénzdobás, a kártyacsomagból egy kártyalapnak a kiválasztása stb.

Mi a valószínűség?

Vizsgáljunk valamilyen kísérletet, amely az előbb említett követelményeknek eleget tesz. Jelöljük a kísérlet különböző lehetséges kimeneteleinek a számát n-nel. Tekintsünk egy tetszőleges eseményt és jelöljük k-val az előbb említett n eset közül azoknak a számát; amelyek kedvezőek az eseményünk bekövetkezésére vonatkozólag. Ha az eseményünk valószínűségét v-vel jelöljük, akkor ennek az értelmezése a következő:

$$v = \frac{k}{n} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{lehetséges esetek száma}}.$$

Így pl. annak a valószínűsége, hogy egy kockával páros számot dobjunk $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, mert a páros szám dobására vonatkozólag 3 kedvező eset van, a 2-es, 4-es és a 6-os, míg a lehetséges esetek száma 6. Annak a valószínűsége, hogy egy csomag magyar kártyából egy lapot kihúzva, az piros lesz $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, míg annak a valószínűsége, hogy egy meghatározott kártyalapot, pl. a zöld tízest húzzuk ki, $\frac{1}{32}$ mert zöld tízes csak egy van egy csomag kártyában.

Mivel kedvező eset mindig legfeljebb annyi van, mint ahány lehetséges eset, azért a valószínűség értéke legfeljebb 1 lehet. 0-val egyenlő a valószínűség akkor, ha $k = 0$, tehát ha az eseményünkre nézve nincs kedvező eset, azaz, ha bekövetkezése lehetetlen és 1-gyel egyenlő abban az esetben, ha $k = n$, tehát ha minden lehetséges eset egyúttal kedvező is, más szóval ha az eseményünk biztosan bekövetkezik. Így pl. annak a valószínűsége, hogy egy kockával 7-et dobjunk 0, míg annak a valószínűsége, hogy az 1-től 6-ig terjedő számok valamelyike legyen a dobás eredménye: 1

Mi egy esemény be nem következésének a valószínűsége? Lássunk előbb egy példát. Annak a valószínűsége, hogy egy csomag magyar kártyából pirosat húzzunk:

$$v = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Annak valószínűsége, hogy nem pirosat (hanem akármilyen más lapot) húzzunk

$$v_1 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4},$$

tehát

$$v_1 = 1 - v.$$

Ez minden esetben így van. Ugyanis, ha egy eseményre nézve a lehetséges esetek száma n, a kedvező esetek száma pedig k, akkor, ezen esemény be nem következésére nézve nyilván $n - k$ számú kedvező eset van, tehát ha az eredeti esemény valószínűségét v-vel, az ellenkezőjének valószínűségét v_1-gyel jelöljük, akkor

$$v_1 = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - v.$$

Tehát egy esemény be nem következésének a valószínűségét úgy kapjuk meg, hogy az eredeti esemény valószínűségét 1-ből levonjuk.

Milyen következtetéseket vonhatunk le egy esemény valószínűségéből az esemény bekövetkezésére vonatkozólag? Ha egy pénzdarabot feldobunk, akkor annak a valószínűsége, hogy a dobás eredménye írás legyen 1/2. Mondhatjuk-e azt, hogy minden két dobás közül az egyiknek az eredménye fej, a másiké írás? Nyilván nem mondhatjuk. Van-e akkor mégis gyakorlati jelentősége a valószínűség fogalmának és ha igen, akkor miben áll ez? Erre a kérdésre a tapasztalat adja meg a megfelelő választ és ez a következő. Végezzünk el nem két, nem is négy hanem igen nagyszámú pénzdobást, pl. egymilliót, akkor ezt fogjuk tapasztalni, hogy a dobások kb. 50%-ának lesz mind ez egyik, mind a másik lehetőség, tehát a fej és az írás az eredménye. Ugyanúgy nagyszámú kockadobás esetén mindegyik szám kb. a dobások egyhatod részének lesz az eredménye. A valószínűségnek tehát nagyszámú kísérlet esetében van gyakorlati jelentősége, amennyiben megmutatja, hogy az elvégzett kísérleteknek kb. hányadrészében fog a megadott esemény bekövetkezni. Ezt az előbbi állítást, mint említettük, a tapasztalat olyan jól igazolja, hogy szinte természeti törvénynek vehetjük és ezért ezt a törvényszerűséget a *nagy számok törvényének* szoktuk nevezni. Ez a törvényszerűség teszi a valószínűség számítás a valóság megismerésének használható eszközévé.[1]

Példák: 1. Egy urnában 3 piros, 4 fekete és 5 sárga golyó van. Mi a valószínűsége annak, hogy ha egy golyót ez urnából kihúzunk, az piros színű lesz?

A kedvező esetek száma 3, a lehetséges esetek száma 12, tehát $v = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

2. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az 1953. évnek egy találomra kiválasztott napja *kedd* legyen?

Helytelen volna úgy okoskodni, hogy a lehetséges esetek száma 7, a kedvező esetek száma 1, tehát a keresett valószínűség $v = \frac{1}{7}$. Ez akkor volna igaz, ha a hét minden egyes napja egyenlően volna esélyes. Ez azonban nem igaz, mert 1953-ban 53 csütörtök van, míg a többi 6 nap mindegyikéből 52–52. Tehát a keresett valószínűség $\frac{52}{365} < \frac{1}{7}$. (A csütörtök valószínűsége $\frac{53}{365} > \frac{1}{7}$)

3. Feldobunk két pénzdarabot. Mi annak valószínűsége, hogy mindkettő írásra esik?

Ismét helytelen volna azt mondani, hogy 3 eset lehetséges: *a)* mindkettő írás, *b)* mindkettő fej, *c)* két különböző lapú dobás. Ebből egy eset kedvező, tehát $v = \frac{1}{3}$. A hiba megint ott van, hogy a számba vett 3 eset nem egyenlően valószínű. Tudniillik a *c)* eset valószínűbb, mint *a)* és *b)* esetek bármelyike. Ugyanis valójában 4 egyenlően esélyes eset van: ii, ff, if, fi és így a keresett valószínűség $\frac{1}{4}$. (A különböző lap dobások valószínűsége pedig $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.)

4. Egy ládában van 20 drb csavar, ezek közül 2 selejtes. Ha a 20 csavar közül egyet találomra kiválasztunk, mi a valószínűsége annak, hagy az ne legyen selejtes.

Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott csavar selejtes legyen $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, tehát annak a valószínűsége, hogy ne legyen selejtes $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$. Természetesen azt is mondhattuk volna: A nem selejtes csavarok száma 18. Tehát a keresett valószínűség $\frac{18}{20} = \frac{9}{10}$. Gyakran azonban ez az utóbbi út jóval járhatatlanabb, mint az előbbi.

5. Mi a valószínűsége annak, hogy két kockával legfeljebb 10-et dobunk?

A lehetséges esetek száma (mivel pld. 2,3 és 3,2 két különböző esetnek tekintendő, mintha a kockák különböző színűek volnának) egyenlő a 6 elemből alkotható 2 osztályú ismétléses *variációk* (és nem kombinációk) számával. Tehát a lehetséges esetek száma $V_6^{i.2} = 6^2 = 36$. A kedvező esetek összeszámlálása itt már fáradságos volna. Sokkal egyszerűbb a kedvezőtlen eseteket összeszámlálni. 11-et csak kétféleképpen (6,5 és 5,6), 12-t pedig csak egyféleképpen (6,6) dobhatunk. Tehát annak valószínűsége, hogy 10-nél többet (legalább 11-et) dobunk $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, és így annak valószínűsége, hogy legfeljebb 10-et dobunk $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

A valószínűségek összeadási tétele

Legyen egy urnában 4 piros, 3 fehér és 2 zöld golyó. Jelöljük v_1-gyel annak a valószínűségét, hogy pirosat és v_2-vel annak a valószínűségét, hogy fehéret húzunk: A lehetséges esetek száma 9, kedvező eset pedig a pirosra nézve 4, a fehérre nézve 3 van, tehát

$$v_1 = \frac{4}{9}, \qquad v_2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Mi a valószínűsége annak, hogy vagy pirosat, vagy fehéret húzunk? A kedvező esetek száma 7, mivel a piros és fehér golyók összesen 7-en vannak, a lehetséges esetek száma pedig 9, tehát ha a keresett valószínűséget v-vel jelöljük, akkor $v = \frac{7}{9}$. Amint látjuk

$$v = \frac{7}{9} = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = v_1 + v_2.$$

Az előbb kiindultunk két eseményből. Az egyik egy piros, a másik egy fehér golyó húzásából állott. Ebből a két eseményből képeztünk egy harmadik eseményt azáltal, hogy csupán annyit kívántunk meg, hogy az említett

[1] A fenti állításban szereplő „körülbelül" kifejezés éppen a valószínűség fogalmának segítségével pontos matematikai állítással helyettesíthető. Az így nyert matematikai tétel helyességét pedig nemcsak kísérlettel, hanem szigorú bizonyítással is igazolni lehet.

két esemény közül *vagy* az egyik, *vagy* a másik következzék be. Azt találtuk, hogy az így értelmezett eseményünk valószínűsége egyenlő az eredetileg tekintett két esemény valószínűségeinek az összegével. Ennek az oka pedig az volt, hogy a v valószínűséget meghatározó tört számlálójában álló 7-es, a kedvező esetek száma nem más, mint a piros golyó húzására és a fehér golyó húzására vonatkozó kedvező esetek számának, 4-nek és 3-nak az összege.

Mindig így van ez, hogy ha két esemény közül vagy az egyiknek, vagy a másiknak a bekövetkezését kívánjuk meg, akkor a vagylagos esemény kedvező eseteinek a száma egyenlő a két esemény kedvező esetei számának az összegével? Tekintsünk például egy csomag magyar kártyát és kérdezzük, mi annak a valószínűsége, hogy ha egy lapot kihúzunk, az vagy piros, vagy király lesz? A piros húzására nézve a kedvező esetek száma 8, a király húzására nézve 4, mégis, ha azt kívánjuk, hogy vagy pirosat vagy királyt húzzunk, erre az eseményre nézve nem 12, hanem 11-t a kedvező esetek száma, mert a 8 piros lapon kívül már csak három király van. Itt tehát a kedvező esetek nem adódnak össze. Ha a 8-hoz hozzáadunk 4-et, akkor ezáltal a piros királyt kétszer számoljuk.

Az, hogy a kedvező esetek száma összeadódik, vagy nem, mindig attól függ, hogy a tekintetbe vett két esemény kizárja egymást, vagy nem. Az első példában a piros és a fehér golyó húzása kizárja egymást, a második példában a piros lap és a király húzása nem zárja ki egymást, mert ha piros királyt húzunk, akkor mindkét esemény bekövetkezik.

Tekintsük most a problémát általánosan. Legyen adva két esemény, amelyek kizárják egymást. Jelöljük az egyikhez tartozó kedvező esetek számát k_1-gyel, az esemény valószínűségét v_1-gyel, a másikhoz tartozó kedvező esetek számát k_2-vel, a megfelelő valószínűséget v_2-vel. Tekintsük azt az eseményt, amely abban áll, hogy a két adott esemény közül az egyik, vagy a másik bekövetkezzék és jelöljük ennek a valószínűségét v-vel. Erre az eseményre nézve a kedvező esetek száma a fent mondattak értelmében $k_1 + k_2$, tehát ha n lehetséges eset van, akkor

$$v = \frac{k_1 + k_2}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n},$$

tehát

$$v = v_1 + v_2.$$

Eszerint *két egymást kizáró esemény esetében annak a valószínűségét, hogy vagy az egyik, vagy a másik bekövetkezzék, úgy kapjuk meg, hogy a két esemény valószínűségét összeadjuk.* Ez a valószínűségek összeadási tétele. (Nevezik »vagy ez – vagy az« valószínűségének is.)

Ha nem két, hanem m számú egymást páronként kizáró eseményünk van, melyekre nézve a kedvező esetek száma $k_1, k_2, \ldots, k_m$, a megfelelő valószínűségek $v_1, v_2, \ldots, v_m$ akkor arra az eseményre nézve, hogy az m számú esemény közül valamelyik bekövetkezzék, a kedvező esetek száma $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ és így, ha ismét v-vel jelöljük a megfelelő valószínűséget, akkor azt kapjuk, hogy

$$v = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_m}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} + \ldots + \frac{k_m}{n},$$

vagyis

$$v = v_1 + v_2 + \ldots v_m.$$

Tehát a valószínűségek összeadási tétele tetszőleges számú páronként egymást kizáró eseményre vonatkozóan is érvényes.

Példák: 1. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha egy csomag magyar kártyából egy lapot kihúzunk, akkor az vagy alsó, vagy felső lesz?

Annak a valószínűsége, hogy alsót húzzunk $v_1 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, hogy felsőt húzzunk $v_2 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Mivel a két esemény kizárja egymást, (csak egy lapot húzunk és az nem lehet egyszerre alsó is és felső is), az összeadási tétel értelmében a keresett valószínűség:

$$v = v_1 + v_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

2. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha 2 kockával dobunk, a kapott számok összege kevesebb lesz 4-nél?

Ez az esemény akkor következik be, ha a dobott számok összege vagy 2, vagy 3. Nézzük meg előbb, hogy mennyi a lehetséges esetek száma. Ez nyilván 36, mert az egyik kocka minden egyes számához a másiknak 6 különböző számát kaphatjuk, a dobás eredményéül, tehát összesen $6 \cdot 6 = 36$ lehetséges eset van. 2-t két kockával csak úgy dobhatunk, ha mindegyik kockával 1-et dobunk, vagyis a kedvező esetek száma 1 és ezért annak a valószínűsége, hogy az összeg 2 legyen $v_1 = \frac{1}{36}$. Hármat kétféleképpen dobhatunk. Vagy az első kockával dobunk 2-t és a másodikkal 1-et, vagy fordítva. Így a kedvező esetek száma 2 és ezért annak a valószínűsége, hogy 3-at dobunk $v_2 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Mivel a 2 és a 3 dobása kizárják egymást, a keresett valószínűség

$$v = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

3. Egy urnában van 4 piros, 3 fehér és 2 zöld golyó. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha egyszerre 2 golyót húzunk ki, a kettő egyforma színű legyen?

2 golyót 9 közül $\binom{9}{2}$ különböző módon választhatunk ki, tehát ennyi a lehetséges esetek száma. 2 piros golyót $\binom{4}{2}$, 2 fehéret $\binom{3}{2}$, 2 zöldet pedig $\binom{2}{2} = 1$ különböző módon választhatunk ki, tehát ha v_1-gyel jelöljük annak a valószínűségét, hogy mind a két kihúzott golyó piros, v_2-vel, hogy fehér és v_3-mal, hogy zöld legyen, akkor

$$v_1 = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{36}, \qquad v_2 = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{3}{36}, \qquad v_3 = \frac{1}{36}.$$

Az az esemény, hogy a kihúzott golyók egyszínűek legyenek, vagy úgy valósul meg, hogy mind a két golyó piros, vagy úgy, hogy mind a kettő fehér, vagy úgy, hogy mind a kettő zöld. Mivel pedig ezek a lehetőségek páronként kizárják egymást, ezért az összeadási tétel értelmében

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Az összeadási tétel alkalmazásánál nagyon kell vigyáznunk arra, hogy a tekintetbe vett események egymást kizáróak legyenek. Ha eseményeink nem zárják ki egymást, tételünk már nem alkalmazható, mert helytelen eredményre vezet. Láttuk azt a példát, amelyben annak a valószínűségét kerestük, hogy egy csomag kártyából vagy egy piros lapot, vagy egy királyt húzunk. A piros lap húzásának a valószínűsége $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, a királyé $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, azonban a keresett valószínűség mégsem $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, hanem $\frac{11}{32}$. Ennek az oka az, hogy amint már említettük, a piros lap és a király húzása nem zárják ki egymást.

A valószínűségek szorzási tétele

Az előző részben egymást kizáró eseményekről volt szó, most pedig független eseményekről fogunk beszélni. Két eseményt akkor nevezünk függetlennek, ha az egyiknek a bekövetkezése nem befolyásolja a másik esemény bekövetkezését.[2] Például ha 2 kockával dobunk, akkor az az esemény, hogy az egyikkel 5-öt dobunk, független attól, hogy a másikkal páros számot dobunk, ha a kockadobásokat egymástól függetlenül végeztük el. Keresni fogjuk annak a valószínűségét, hogy két esemény együtt bekövetkezzék.

Lássunk egy példát. Két urna áll egymás mellett. Az egyikben 2 fehér és 3 fekete, a másikban 3 fehér és 4 fekete golyó van. Vegyünk ki mind a kettőből egyet. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a két golyó fehér lesz? Számítsuk ki előbb a lehetséges esetek számát. Az egyik urna minden egyes golyója társulhat a másik urna minden egyes golyójával, tehát a lehetséges esetek száma $5 \cdot 7 = 35$. Hasonlóképpen a kedvező esetek száma $2 \cdot 3 = 6$, mert az első urna minden egyes fehér golyója társulhat a másik minden egyes fehér golyójával. A keresett valószínűség tehát:

$$v = \frac{6}{35} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{2}{5}$ annak a valószínűsége, hogy az első urnából, $\frac{3}{7}$ pedig hogy a második urnából fehér golyót húzzunk, továbbá, hogy ezek az események függetlenek egymástól.

Tekintsünk most általában két független eseményt, amelyekre nézve a kedvező esetek száma legyen k_1 és k_2 a lehetséges esetek száma n_1 és n_2, az események valószínűségei pedig v_1, és v_2. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a két esemény bekövetkezzék? A két esemény együtt akkor következik be, ha mind a kettőnek valamelyik kedvező esete megvalósul. Az egyiknek van k_1, a másiknak k_2 kedvező esete, tehát annak az eseménynek, amely abban áll, hogy az egyik is és a másik is bekövetkezik $k_1 \cdot k_2$ kedvező esete van, mert a két esemény függetlensége következtében az egyik összes kedvező esete társulhat a másik összes kedvező esetével. Hasonlóképpen a lehetséges esetek száma $n_1 \cdot n_2$. Tehát ha v-vel jelöljük annak a valószínűségét, hogy mindkét esemény bekövetkezzék, akkor

$$v = \frac{k_1 k_2}{n_1 n_2} = \frac{k_1}{n_1} \cdot \frac{k_2}{n_2},$$

$$v = v_1 \cdot v_2$$

Eszerint *annak a valószínűségét, hogy két független esemény esetén – az egyik is és a másik is bekövetkezzék, úgy kapjuk meg, hogy a két esemény valószínűségét összeszorozzuk.* Ez a valószínűségek szorzási tétele. (Nevezik »mind ez - mind az« valószínűségének is.)

Ha három, vagy általában m számú független eseményünk van, melyek $v_1, v_2, \ldots, v_m$ valószínűségekkel következnek be, akkor annak a valószínűsége, hogy mindegyik esemény bekövetkezzék, az előbbihez teljesen hasonló meggondolással

$$v = v_1 \cdot v_2 \ldots v_m$$

szorzat által számítható ki. Tehát a valószínűségek szorzási tétele tetszőleges számú független eseményre érvényes.

[2] Ez a függetlenségnek a legegyszerűbb esete. Látni fogjuk, hogy a függetlenség fogalma értelmezhető általánosabban is.

Példák. 1. Mi a valószínűsége annak, hogy ha egy kockát és egy pénzdarabot feldobunk, a kockával 6-ot és a pénzzel pedig fejet dobunk?

Az első esemény valószínűsége $\frac{1}{6}$, a másodiké $\frac{1}{2}$, mivel pedig ezek az események függetlenek, a szorzási tétel értelmében a keresett valószínűség $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

2. Négy urna van elhelyezve sorban egymás mellett. Mindegyikben van, 9 számozott cédula az 1-től 9-ig terjedő számjegyek valamelyikével ellátva úgy, hogy egy urnában minden számjegy csak egy cédulán szerepel. Mi a valószínűsége annak, hogy ha mindegyik urnából egy cédulát kihúzunk és az urna elé helyezzük, az 1953-as számot kapjuk?

Annak a valószínűsége, hogy az elsőből 1-est húzzunk $\frac{1}{9}$. Ugyanennyi a valószínűsége annak, hogy a másodikból 9-est, a harmadikból 5-öst, a negyedikből 3-ast húzzunk. Ha tehát megkívánjuk, hogy mindegyik bekövetkezzék, akkor a szorzási tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy ennek a valószínűsége:

$$v = \left(\frac{1}{9}\right)^4 = \frac{1}{6561}.$$

3. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ha 5 pénzdarabot feldobunk, vagy mind az öttel fejet vagy minddel írást dobunk?

Annak a valószínűsége, hogy mind az öttel fejet dobjunk, mivel oly független eseményekről van szó, melyek közül mindegyik $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be a szorzási tétel értelmében $\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$. Ugyanennyi a valószínűsége annak az eseménynek is, hogy mind az öttel írást dobjunk. Mivel mind az öt pénzzel való fej és írás dobása egymást kizáró események, a keresett valószínűség:

$$v = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}.$$

A szorzási tétel alkalmazásánál vigyáznunk kell arra, hogy csak független események esetére érvényes, minden más esetben az alkalmazása helytelen eredményre vezet. Tekintsünk pl. egy urnát, amelyben van egy piros, egy fehér és egy zöld golyó. Ha egymás után (nem egyszerre) kihúzunk két golyót, mi a valószínűsége annak, hogy az első piros, a második fehér lesz? Ha azt mondanánk, hogy mivel annak valószínűsége, hogy pirosat húzzunk $\frac{1}{3}$, továbbá hogy fehéret húzzunk, szintén $\frac{1}{3}$, azért annak valószínűsége, hogy elsőre pirosat és másodikra fehéret húzzunk, e két valószínűség szorzata $\frac{1}{9}$, akkor helytelenül járnánk el. Ugyanis jelöljük P-vel a piros, F-fel a fehér és Z-vel a zöld golyó húzását, akkor, ha két golyót egymás után kihúzunk, a következő 6 eset lehetséges: PF, PZ, FP, FZ, ZP, ZF. Kedvező eset pedig csak egy van: PF, tehát a keresett valószínűség:

$$v = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9}.$$

Ennek az oka az, hogy a piros húzása befolyásolja a fehér húzását. Ha először pirosat húzunk, a fehérre már csak 2 lehetőség marad, míg a pirosra még 3 volt. Tehát

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Más a helyzet, ha az első húzással kihúzott golyót ismét visszatesszük az urnába, mielőtt a második húzást végezzük. Ez esetben a második golyó húzása teljesen független az első húzástól, vagyis az esetében valóban

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Tényleg a lehetséges esetek száma most 9: PP, PF, PZ, FP, FF, FZ, ZP, ZF, ZZ.

(A 2., befejező közlemény az áprilisi számban jelenik meg.)