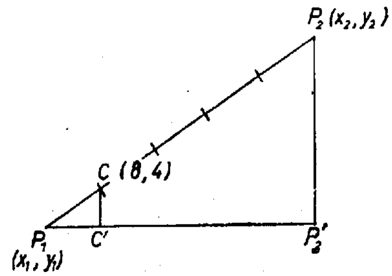
I. megoldás. Legyenek a húr P_1, P_2 végpontjainak koordinátái: (x_1, y_1), (x_2, y_2), az adott pont C, úgy hogy $P_1C : CP_2 = 1 : 4$. Ekkor

$$y_1^2 = 4x_1, \tag{1}$$

$$y_2^2 = 4x_2. \tag{2}$$

Legyen továbbá C és P_2 vetülete a P_1-en át az x tengellyel párhuzamosan húzott egyenesen C', P_2' (1. ábra).



1. ábra

A szög párhuzamos szelőinek tételei alapján $P_1C' : C'P_2' = P_1C : CP_2 = 1 : 4$, eszerint

$$(8 - x_1) : (x_2 - 8) = 1 : 4,$$

$$4x_1 + x_2 = 40, \tag{3}$$

és ugyanígy

$$(4 - y_1) : (y_2 - 4) = 1 : 4$$

$$4y_1 + y_2 = 20. \tag{4}$$

(Az utóbbi két egyenlet együttvéve azt is kifejezi, hogy C rajta van a P_1P_2 egyenesen. A szög létrejön, mert az x tengellyel párhuzamos egyenesek az adott parabolát csak egy pontban metszik, P_2' nem azonos P_2-vel, másrészt a szög nem derékszög, mert a C-n átmenő és az x tengelyre merőlegesen álló egyenes a parabolát a $+4\sqrt{2}$ és $-4\sqrt{2}$ ordinátájú pontokban metszi, és e húron a részek aránya

$$\frac{4\sqrt{2} - 4}{4 + 4\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2},$$

ami nem egyenlő sem 4-gyel, sem 1/4-del.

Helyettesítsük (3)-ba x_1-nek és x_2 nek (1) és (2) alapján adódó kifejezését, majd y_2-nek (4)-ből adódó kifejezését, így y_1-re egyismeretlenes egyenletet kapunk:

$$y_1^2 - 8y_1 + 12 = 0, \quad \text{amiből} \quad y_1' = 2,\ y_1'' = 6. \tag{5}$$

Eszerint két húrt kapunk az előírt tulajdonsággal:

y_1'-ből:	$P_1'(1, 2)$,	$P_2'(36, 12)$;
y_1''-ből:	$P_1''(9, 6)$,	$P_2''(4, -4)$.

Valóban, mindkét húr megfelel a követelménynek.

Hodossy László (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.)

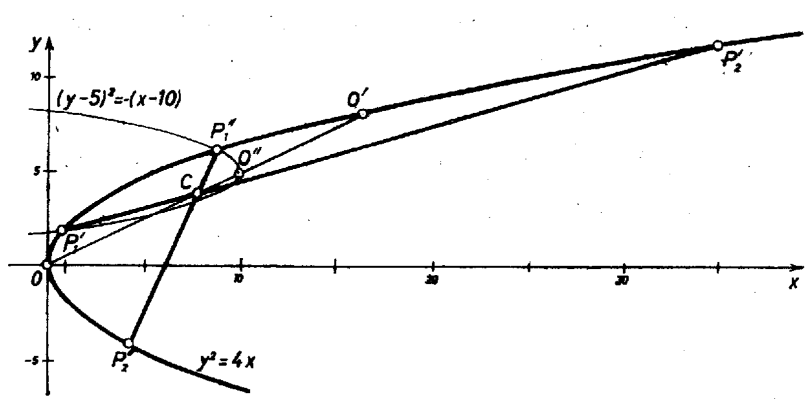
Megjegyzés. Célhoz érünk úgy is, hogy a húrt kimetsző szelő egyenes m iránytangensét vesszük ismeretlennek. A metszéspontok ordinátáira:

$$y_{1,2} = \frac{2}{m} \mp \sqrt{\frac{4}{m^2} - \frac{16}{m} + 32},$$

ezeket (4)-be beírva

$$\frac{4}{m^2} - \frac{16}{m} + 7 = 0, \quad (m \neq 0,\ m\,\text{véges}), \quad m_1 = \frac{2}{7}, \quad m_2 = 2.$$

II. megoldás. P_1 úgy áll elő P_2-ből, hogy ezt C-re tükrözzük, vagy ami ugyanaz, 180°-kal elforgatjuk C körül, majd a képet C-ből mint középpontból 1/4 arányban kicsinyítjük (forgatva nyújtás). Ezt a parabola minden pontjára elvégezve egy újabb parabolát kapunk, s mivel P_1 az eredeti parabolán is rajta van, a két parabola metszéspontja lesz (2. ábra).



2. ábra

Az adott parabola $O(0,0)$ csúcsának C-re vett tükörképe $O'(16,8)$, a kicsinyített kép csúcsa $O''(10,5)$, paramétere az adott parabola $p=2$ paraméteréből $p/4=1/2$, és a csúcsból kiinduló, a fókuszon átmenő félegyenes iránya az x tengely negatív felének irányával egyezik meg. Ezek szerint egyenlete:

$$(y-5)^2=-2\cdot\frac{1}{2}(x-10)=10-x,$$

innen x-et az adott $y^2=4x$-be helyettesítve ismét (5)-öt kapjuk, vagyis a fenti P_1'-t és P_2'-t.

Az $1/4$ arányú kicsinyítés helyett végezhetünk 4-szeres nagyítást is, ekkor metszéspontként P_2'-t és P_2''-t kapjuk meg közvetlenül.

Vigassy Lajos