n-nek legkisebb, szóba jövő értékére, $n=2$-re K értéke $(33-9)/(33-27)=4$, így azt kell bizonyítanunk, hogy minden pozitív egész $n(>1)$ esetén $4-K$, azaz

$$\frac{3(1^5+2^5+\ldots+n^5)+(1^3+2^3+\ldots+n^3)-4(1+2+\ldots+n)^3}{(1^5+2^5+\ldots+n^5)-(1+2+\ldots+n)^3}$$

értéke 0, és természetesen hogy a nevező 0-tól különböző ($n=1$ esetén a nevező 0, K nincs értelmezve). Minden $n>0$ esetén, mint ismeretes[1]

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{és}$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \tag{1}$$

így az állítás egyenértékű azzal, hogy $n>1$-re

$$1^5+2^5+\ldots+n^5=\frac{1}{3}\left[-(1^3+2^3+\ldots+n^3)+4(1+2+\ldots+n)^3\right]= \frac{n^2(n+1)^2}{12}\left[2n(n+1)-1\right]. \tag{2}$$

Ezt fogjuk bizonyítani a teljes indukció módszerével.

$n=2$-re (2) helyességét már láttuk. (Egyébként (2) az $n=1$ esetre is helyes.) Feltesszük; hogy (2) helyes valamely k természetes szám esetében:

$$1^5+2^5+\ldots+k^5=\frac{k^2(k+1)^2}{12}\left[2k(k+1)-1\right], \tag{2'}$$

és bebizonyítjuk, hogy helyes az 1-gyel nagyobb számra is:

$$1^5+2^5+\ldots+k^5+(k+1)^5=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{12}\left[2(k+1)(k+2)-1\right]. \tag{2''}$$

Valóban, $(2'')$ és $(2')$ jobb oldalának különbsége

$$\frac{(k+1)^2}{12}\left[2(k+1)(k+2)^3-(k+2)^2-2k^3(k+1)+k^2\right],$$

itt a szögletes zárójelbeli kifejezés egyszerű alakítással

$$2(k+1)\left[(k+2)^3-k^3\right]-\left[(k+2)^2-k^2\right]=$$
$$4(k+1)\left[3k^2+6k+4-1\right]=12(k+1)^3,$$

így a jobb oldalak különbsége $(k+1)^5$, egyenlő a bal oldalak különbségével. Eszerint $(2')$ érvényessége öröklődik $(2'')$-re, tehát (2) helyes.

Most már K nevezője (2) és (1) alapján

$$(1^5+2^5+\ldots+n^5)-(1+2+\ldots+n)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{24}\left[4n^2+4n-2-3n(n+1)\right]=$$
$$\frac{(n-1)\cdot n^2\cdot(n+1)^2\cdot(n+2)}{24},$$

és ez $n>1$ esetén sohasem 0. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Várható volt, hogy K nevezőjének első tagja is n-nek polinomja – amint ezt a második tagról tudjuk –, így a nevező is az, ennélfogva legföljebb annyi n értékre veszi fel a 0 értéket, amennyi a fokszáma. Erre támaszkodva végeztük előbb (2) bizonyítását, és csak ez után azt, mely n értékek esetén válik 0-vá a nevező.

[1]A köbök összegének zárt alakját lásd pl.: *Gallai Tibor-Hódi Endre-Péter Rózsa-Szabó Piroska-Tolnai Jenő:* Matematika az ált. gimn. III. o. számára, 9. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest 1959, 128. o.