a) Az adott kifejezés így alakítható:

$$K = \frac{(n^3+10n^2)-(120n^2+1200n)+(999n+9990)-12\,600}{-(n+10)} =$$

$$(1) \qquad = -n^2+120n-999+\frac{12\,600}{n+10}.$$

n helyére egész számot helyettesítve a jobb oldal első három tagja egész. Ezért K akkor és csak akkor egész, ha a tört kifejezés egész számot ad, vagyis ha $n+10$ egyenlő 12 600 valamelyik osztójával. Itt természetesen az abszolút értékben egyenlő pozitív és negatív osztókat külön-külön tekintjük.

$12\,600 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7$, az 1106. gyakorlatban[1] látottak szerint pozitív osztóinak száma az 1-gyel -1-gyel növelt kitevők szorzata: $(3+1)(2+1)(2+1)(1+1)=72$, ugyanennyi a negatív osztók száma, tehát 144 olyan n egész szám van, amely mellett K egész. Éspedig az

$$n+10 = -12\,600,\ -6\,300,\ \ldots,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ \ldots,\ 12\,600$$

egyenletből

$$n = -12\,610,\ -6\,310,\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 2,\ \ldots,\ 12\,590.$$

b) Az $n>0$, $K>0$ egész értékpárok meghatározása céljára kizárjuk azokat a pozitív egész n-eket, amelyekre $K\le 0$. Alakítsuk (1)-et így: $K=K_1+K_2$, ahol

$$K_1=\frac{12\,600}{n+10}, \quad K_2=(111-n)(n-9)=-(n-60)^2+2\,601.$$

K_1 minden $n>0$ esetén pozitív és monoton csökken, ha n növekszik. Ha $9\le n\le 111$, akkor $K_2\ge 0$, itt tehát $K>0$. Az $n>111$ és $0<n<9$ értékekre $K_2<0$, az utóbbiakra azonban

$$|K_2| \le 110(9-n) < K_1, \quad \text{mert}$$

$$\frac{12\,600}{n+10}-110(9-n) = \frac{110n^2+110n+2700}{n+10} > 0,$$

tehát itt is $K>0$.

A második alak, szerint $n>60$ esetén K_2 is monoton csökkenő, tehát ez áll K-ra is. Mármost $n=113$ esetén $K<0$, de $n=112$ esetén még $K>0$. Mindezek szerint $K>0$ a $0<n<113$ egész értékekre teljesül.

Ezekre az n-ekre $10<n+10<123$, azt keressük tehát, hány osztója van 12 600-nak 10 és 123 között, a határokat nem véve tekintetbe. A választ két észrevétel könnyíti. A $12\,600=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7$ felbontás mutatja, hogy az $1,2,\ldots,10$ egész számok mindegyike osztó, tehát az alsó korlát miatt elhagyandó pozitív osztók száma 10. Másrészt 12 600 négyzetgyöke, 112,2 közel esik a 123-as korláthoz, a nála kisebb és nagyobb osztók száma egyenlő, hiszen a négyzetgyöknél kisebb számmal osztva a hányados nagyobb a gyöknél és megfordítva. Pl. $12\,600/105=120$, ezek ún. kapcsolt osztók 12 600-ra nézve. Így a 112,2-ig megtartandó osztók száma $72/2-10=26$, és csak a 112,2 és 123 közti osztóit kell megkeresnünk 12 600-nak. Már láttuk, hogy 120 megfelelő osztó, több pedig nincs, mert 113 prím, a továbbiak pedig rendre a 19, 23, 29, 13, 59, 17, 11, 61 törzsszám többszörösei, amik nincsenek meg 12 600 felbontásában.

Mindezek szerint 27 olyan n természetes szám van, amely mellett K pozitív egész szám.

Hárs László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján, egyszerűsítésekkel

[1] K. M. L. 35 (1967) 151. o.