I. A (3) kifejezés mindkét oldalának minden egyes tagja (1) szerint 4 tagú kifejezés. (1)-nek mindegyik tagjában csak egyféle koordináta lép fel, csak x, vagy csak y, vagy csak z, vagy csak u, éspedig 2., 3., 4. tagja úgy áll elő az előtte állóból, hogy abban a szóban forgó pontok 1., 2., ill. 3. koordinátáját rendre az illető pont 2., 3., 4. koordinátájával helyettesítjük. Mivel még S bármelyik koordinátájának képezésében is csak az ugyanannyiadik koordinátáit használjuk fel P_1, P_2, P_3, P_4-nek, éspedig (2) alapján, az előbb leírt helyettesítésekkel, azért (3) két oldala olyan 4–4 kifejezés összegére bontható, hogy az elsőkben csak x betűk lépnek fel, és a 2., 3., 4. kifejezések úgy állnak elő az 1-gyel kisebb sorszámúakból, hogy bennük (az indexek megtartásával) minden egyes x, y, z betű helyére y-t, z-t, végül u-t írunk.

Ezek alapján (3) bizonyítása végett elég megmutatni, hogy a jobb és bal oldal x-es tagjaiból alakuló két kifejezés azonos, ebből már következik a két oldali y-os, z-s, ill. u-s kifejezések azonossága is, tehát (3) helyes volta. További (3)-nak csak az x-es tagjait tekintjük.

Az azonosítást könnyen áttekinthetővé tehetjük x_5 szerinti rendezéssel, hiszen így a két kifejezés, a koordináta-különbségek négyzetének kifejtése után, x_5-nek másodfokú polinomja.

x_5^2 együtthatója a bal oldali $(x_5-x_S)^2$-ben 1, jobbról pedig $1/4\cdot 4=1$, hiszen 5-ös index csak az $1/4$ együtthatójú zárójelben lép fel, és azon belül mind a négy $(x_5-x_i)^2$ kifejezésből – ahol $i=1, 2, 3, 4$ – az első tag x_5^2, együtthatója 1, összegük 4.

Ugyanígy látjuk, hogy x_5 első hatványának együtthatója a bal oldalon $-2x_S$, a jobb oldalon

$$\frac{1}{4}(-2)(x_1+x_2+x_3+x_4),$$

ezek pedig (2) szerint azonosak.

Az x_5-öt nem tartalmazó tag (3) bal oldalán, (2) felhasználásával,

$$x_S^2=\frac{1}{16}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2= \tag{4}$$

$$=\frac{1}{16}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)+\frac{2}{16}\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right).$$

A jobb oldalon, az $1/4$ együtthatójú zárójelben az x_5-öt nem tartalmazó tagok mind négyzetek: x_i^2, ahol $i=1, 2, 3, 4$. Az ilyen tagok száma a $-1/16$ együtthatójú zárójelben $6\cdot 2=12$, éspedig mindegyik index 3-szor lép fel, a többi 3 indexszel párosítva, így x_i^2 együtthatója a jobb oldalon

$$\frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{16}\cdot 3=\frac{1}{16},$$

egyenlő a (4) jobb oldalán álló első együtthatóval.

Végül a $-1/16$ együtthatójú zárójel 6 vegyes indexű, kéttényezős $-2x_ix_j$ alakú szorzatot tartalmaz az 1, 2, 3, 4 indexek minden párosításával, és ezek összege azonos (4) jobb oldalának második tagjával.

Ezzel a (3) két oldalán álló, csak x-eket tartalmazó kifejezések minden tagját figyelembe vettük, az azonosság fennáll, így a fentiek szerint a bizonyítást befejeztük.

II. Az 1121. gyakorlatban[1] feladatunk állításának a 3-dimenziós (vagyis a megszokott térbeli) megfelelőjét bizonyítottuk, és ehhez a II. megoldásban felhasználtuk az a, b, c oldalakkal bíró ABC háromszög C csúcsából kiinduló $s_c=CF$ súlyvonalára vonatkozó

$$s_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4},\quad \text{azaz}\quad CF^2=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2\right)-\frac{1}{4}AB^2$$

összefüggést, ami pedig feladatunk állításának a 2-dimenziós térbeli, vagyis a megszokott síkbeli megfelelője. Valóban, a síkon, a 2-dimenziós térben egy pont meghatározására 2 koordináta elegendő, és a P_1 (x_1,y_1) és P_2 (x_2,y_2) pontok távolságára

$$P_1P_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

felezőpontjuk – a két pontból álló pontrendszer súlypontja – koordinátái pedig

$$x_S=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y_S=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Ugyanezek a 3 koordinátával leírt (3-dimenziós) térben

$$P_1P_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

[1]Az $ABCD$ háromoldalú gúla (tetraéder) ABC lapjának súlypontja S. Bizonyítsuk be, hogy a gúla D-ből kiinduló DS súlyvonala az élek felhasználásával az alábbi képlettel fejezhető ki:

$$DS^2=\frac{1}{3}(DA^2+DB^2+DC^2)-\frac{1}{9}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

ami egy alkalmas téglatest testátlója hosszaként könnyen belátható, a $P_1P_2P_3$ háromszög S súlypontjára pedig

$$x_S = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_S = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_S = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Itt az első kettőt ismerjük a síkbeli koordináta-geometriából, érvényességük belátható abból, hogy egy háromszög súlypontjának vetülete azonos vetületének súlypontjával, hiszen szakasz felezőpontjának (súlypontjának) vetülete felezi a szakasz vetületét, és ugyanez áll a szakasz bármilyen $m : n$ arányú osztópontjára, esetünkben a súlyvonalakat $2 : 1$ arányban osztó pontra.

A (3) jobb oldalán álló $1/4$, $-1/16$ együtthatók helyére a 3 dimenziós térben $1/3$ és $-1/9$ lépett, 2 dimenzióban pedig $1/2$ és $-1/4$, vagyis $n = 4$, 3, 2 esetében egyformán $1/n$, ill. $-1/n^2$.

Barra Károly (Salgótarján, Madách I. Gimn., IV. o. t.)
Bálványos Zoltán (Makó, József A. Gimn., III. o. t.)