Kedves fiatal olvasóm! Mikor a címet megláttad, talán azt gondoltad, Te is szorgalmasan megoldod lapunk feladatait, tehát ügyes fiatal matematikus vagy, ennélfogva Rólad lesz itt szó. Reméljük, hogy pár év múlva csakugyan így lesz, hogy hasonló cikkben Rólad is kell írni, ma azonban csak azokról beszélek Neked, akik már eddig, feltűnően fiatal korban jelentős, új eredményt értek el.

Érdekes megfigyelés, hogy az emberi szellemi tevékenység egyetlen ágában sincs oly nagy szerepe a fiatalságnak, mint a matematikában. A matematikában ugyanis a tehetség és fantázia aránylag kevesebb ismerettel is nagyon sokra viheti.

*

1. A másodfokú egyenlet megoldását jól tudod. Ez bizony elég nagy múltra tekint vissza. Az ógörögök geometriai megoldását jól ismerték. Algebrai, algoritmikus (algoritmus = számolási eljárás) megoldása is már kb. 1100 éves, Mohamed ibn Musa Alkhovarizmi arab tudóstól származik, (akinek nevéből lett az algoritmus szó és aki az algebra szót kitalálta.). Közelfekvő gondolat volt oly egyenletekkel foglalkozni, melyekben az ismeretlen harmadik hatványon szerepel. x^3+x^2 táblázatai segítségével az óbabiloniak már 4000 évvel ezelőtt meg tudták közelítőleg oldani a harmadfokú egyenletet, de a másodfokúéhoz hasonlón számítási eltárással ez csak kb. 1515-ben sikerült Scipione dal Ferrone bolognai tanárnak, akinek vívmányát először Cardano (ejtsd: Kárdáno, de az á hang rövid – élt 1501 – 1576) ugyancsak olasz tudós tette közismertté 1546-ban. Cardano tanítványának Ferrari-nak 1545-ben, 22 éves korában sikerült a további nagy probléma, a negyedfokú egyenlet megoldása. Gondolatmenetének lényege ez: Ha a megoldandó negyedfokú egyenlet

$$y^4+b_1y^3+b_2y^2+b_3y+b_4=0,$$

akkor az $y=x-\dfrac{b_1}{4}$ helyettesítés után a második tag kiesik és ilyen alakú egyenletet kapunk

$$x^4+ax^2+c=bx.$$

Közelfekvő gondolat a baloldalt teljes négyzetté tenni, amit Ferrari rendkívül ügyesen ért el. Mindkét oldalon $(2\sqrt{c}-a)x^2$-et hozzáadva

$$\left(x^2+\sqrt{c}\right)^2=(2\sqrt{c}-a)x^2+bx,$$

vagyis a baloldalon teljes négyzetet kapunk. Igyekeznünk kell a jobb oldalt is teljes négyzetté tennünk. Ezt Ferrari egy új z segédváltozó bevezetésével úgy éri el, hogy mindkét oldalhoz oly kifejezést ad hozzá, mely a baloldalt továbbra is meghagyja teljes négyzetnek. Ez $2(x^2+\sqrt{c})z+z^2$ és ekkor az egyenlet

$$\begin{gathered}\left(x^2+\sqrt{c}\right)^2+2(x^2+\sqrt{c})z+z^2=(2\sqrt{c}-a+2z)x^2+bx+\\ +(2\sqrt{c}z+z^2),\\ \left[x^2+(z+\sqrt{c})\right]^2=(2\sqrt{c}-a+2z)x^2+bx+(2\sqrt{c}z+z^2),\end{gathered}$$

ahol z bármilyen szám lehet. A jobb oldal tehát teljes négyzetté lesz, ha z-t úgy választjuk meg, hogy

$$4(2\sqrt{c}-a+2z)(z^2+\sqrt{c}z)=b^2$$

legyen, ami z hatványai szerint rendezve

$$z^3+\left(3\sqrt{c}-\frac{a}{2}\right)z^2+(2c-a\sqrt{c})z=\frac{b^2}{8},$$

vagyis harmadfokú egyenlet, amelyet akkor már a Cardano féle formulákkal meg tudtak oldani. z innen kiszámított értékei felhasználásával a negyedfokú egyenlet megoldhatóvá vált. A nagy probléma megoldása sikerült és ifjú feltalálója nevét halhatatlanná tette.

Láthatjátok, hogy maga az alapgondolat egyszerűsége ellenére vérbeli matematikusra vall, kivitele pedig rendkívül éleselméjűséget és nagy számolási készséget igényel, pedig én a mai kényelmes jelölésekkel mondtam el. Ferrai idejében sem a betűszámtan, sem a mai áttekinthető jelölési mód még nem volt feltalálva. Ferrai tehát elsőrangú matematikai lángelme, viszont szeretetreméltó embernek nem volt nevezhető. Heves vérmérséklete miatt verekedés közben egyik kezének néhány ujját levágták.

2. Hallottatok már arról, hogy az ógörögök a tökéletesség mily magas fokára emelték a geometriát. A geometria több mint 1300 éven át nem haladt túl azon a fokon, melyet az ógörögöknél elért, mert haladása már csak lényeges új elvek bevezetésével vált lehetségessé. A nagy lépést, – mondhatnók ugrást – amely a modern geometriához vezetett, az 1630-as években négyen tették meg. A világhírű Descartes (ejtsd: Dékárt, az á rövid; francia, 1596 – 1650) és Fermat (ejtsd: Fermá, francia, 1601? – 1665), akik 1637-ben feltalálták az analitikus geometriát; egy francia építész Desargues (ejtsd: Dézárg, az á rövid, 1593 – 1661) és egy 16 éves fiú, Blaise Pascal (ejtsd: Pászkál, rövid á-val, francia 1623 – 1662) megalapítja a „helyzet” geometriát.

A rendkívüli matematikai csodagyermekek sorát Pascal nyitja meg. Már apja is ismert matematikus volt, szerinte a geometria a figurák alakjával és kimérésével foglalkozik. Ezt a meghatározást épp a fia cáfolta meg. Pascal tétele szerint ugyanis a kúpszeletbe írt hatszög átellenes oldalpárjainak 3 metszéspontja egy egyenesen fekszik. Ebben a tételben nem szerepel a hatszögalakja, sem nagysága, és éppen ez az, amiért oly rengeteg sokat mond. Az ógörög stílusú „régi” geometriától annyira eltér, hogy nem csodálatos, ha a maga idejében sokan meg sem értették és nem méltányolták. Pascal tétele csak mintegy 150 évvel később a francia forradalom idején vált közkinccsé; a geometria egyik igen lényeges fejezetének, a kúpszeletek elméletének alaptétele. A kor nagy matematikusai persze elismerték, de Descartes el sem akarta hinni, hogy egy 16 éves fiútól származik és azt hitte, Pascal apja a tétel szerzője. Párizs kiváló matematikusai akkor hetenként összegyűltek, ezen összejövetelekre Pascal már 16 éves korban bebocsátást nyert és sokszor hozta ámulatba a felnőtteket.

Pascal további pályája méltó ehhez a kezdethez. Önmagát ugyan matematikusnak tekintette (akárcsak Descartes), de az ő működése sem szorítkozik kizárólag a matematikára, sőt néha évekre abbahagyta. Nevezetes filozófus, vallási kérdések is foglalkoztatták, a francia irodalmi stílus egyik legnagyobb művésze, akinek könyveit ma is élvezettel olvassák. A francia kultúra egyik legnagyobb büszkesége. Az ú. n. Pascal-féle háromszögről a lap egy másik cikkében olvashattok.[1] Egy szerencsejátékokkal kapcsolatban feltett kérdés vezette rá Pascal-t a matematika egy új, ma különösen a Szovjetunióban igen virágzó ágának, a valószínűségszámításnak a feltalálására. A számológépet is Pascal találta fel 19 éves korában. Túl hosszúra nyúlna ez a cikk, ha Pascal, további méltatásába bocsátkoznék.

3. A következő csodagyermek, akiről meg kell emlékeznünk Alexis Clairaut (francia, ejtsd Kleró, 1713 – 1765). A természet egyik érthetetlen csodája. 16 éves korában megalkotja a térbeli görbék és görbe felületek elméletét, úgy, ahogy azt ma a másodéves egyetemi és műegyetemi hallgatók tanulják. Könyve 1731-ben 18 éves korában jelenik meg. Tételeinek fogalmazásában és bizonyításában döntő szerepe van az akkor feltalált differenciál és integrálszámításnak, melyet akkor még számos híres tudós sem ismert, és ime ez a 16 éves szinte gyermek fölényes biztonsággal kezeli.

A folytatás azonban nem méltó ehhez az induláshoz. Clairaut ugyan jelentékeny matematikus, fizikus és csillagász (pl. a Föld lapultságát a sarkoknál ő állapította meg), 18 éves korában a francia akadémia tagja, de főműve ez az első maradt, ahogy egy történész írja róla, „túlélte tehetségét”.

4. Uralkodóhoz illő szerénységgel írta II. Frigyes porosz király 1766-ban Lagrange-nak, hogy Európa legnagyobb uralkodója meghívja udvarába Európa legnagyobb matematikusát. Joseph Louis Lagrange (ejtsd Lágranzs rövid á-val, olasz születésű francia, 1736 – 1813) olasz grófi család gyermeke és az arisztokrata ifjak léha életét élte, amíg 19 éves korában a család elvesztette vagyonát. Akkor kezdett csak matematikával foglalkozni, amelyben oly haladást ért el, hogy még 19 éves korában nagy jelentőségű matematikai felfedezést tett, amelyet nem részletezhetek, mert a magasabb matematikához tartozik. Levelét elküldte Euler-nek, a világ akkori legkiválóbb matematikusának, aki válaszában vele egyenrangú tudós gyanánt kezelte. Lagrange később legnagyobb szerencséjének tekintette elszegényedését, amely nélkül, amint mondta, sohasem ismerkedett volna meg a matematikával.

Lagrange ragyogó pályájának további ismertetése meghaladná cikkem kereteit. Egyetlen – de igen fontos – felfedezését említem csak, mert erre később visszatérek.

Számokat sokszor közelítőleg számítunk csak ki. Legtöbbször még más törteket is tizedestörtté alakítunk, mert könnyebben tudunk velük számolni. Közönséges tört általában csak végtelen tizedestörtbe fejthető, de ez esetben biztosan szakaszos tizedestörtbe. Lagrange egy más alakú közelítést dolgozott ki. Pl. $\sqrt{2}$-t az

$$1, 1+\frac{1}{2},\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}},\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}},\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}},\dots$$

törtek közelítik meg. Általában minden számot meg lehet közelíteni,

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

alakú úgynevezett *lánctörtekkel.* Minden újabb közelítő tört úgy keletkezik, hogy a meglévő a_i értékek változatlanok maradnak, csak még egy újabbat kell hozzájuk kiszámítani. Minden racionális szám véges lánctört alakjába írható, pl.

$$\frac{19}{11}=1+\frac{1}{11/8}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8/3}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3/2}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

[1] Neukomm Gyula: *Kéttaguak hatványai.* (122 old.)

és nyilván minden véges lánctört racionális szám, hiszen közönséges törtté alakítható. LAGRANGE nagy felfedezése, hogy minden másodfokú egyenlet irracionális gyöke szakaszos lánctörtté fejthető (azaz a_0, a_1, a_2, … számok sorozata valahonnan éppúgy szakaszosan ismétlődik, mint racionális számok tizedestört-alakjában a számjegyek) és minden szakaszos lánctört másodfokú egyenletet elégít ki.

5. A következő ifjú lángész, akiről beszélnünk kell, a „princeps mathematicorum" Carl Friedrich GAUSS (német, ejtsd Gaussz, 1777 – 1855), akit a legtöbben a legkiválóbb matematikai genie-nek tartanak, aki valaha élt. Az előbb csodáról beszéltünk. Ugyanezt mondhatjuk Gaussról. 18 éves korában örökbecsű matematikai felfedezéseket özönével tesz.

Az ógörögök meg tudták szerkeszteni körzővel és vonalzóval a szabályos háromszöget négyszöget (= négyzet) ötszöget és természetesen a 2-szer, 4-szer stb., akkora, valamint a $3 \cdot 5 = 15$ oldalú sokszöget. Hogy egyebet is lehet, arra több mint 2000 éven át nem is gondolt senki. Érthető tehát az a nagy feltűnés, amelyet a 18 éves GAUSS felfedezése keltett, hogy a szabályos 17 szög (és általában $2^{2^k} + 1 = n$ oldalú szabályos sokszög ha n primszám) körzővel és vonalzóval megszerkeszthető. 8 nappal ezután a korszakalkotó felfedezés után egy másik még fontosabb következett. Legyen p és q két páratlan primszám. Előfordulhat, hogy ha valamely teljes négyzetből kivonom p-t, a különbség osztható q-val, azaz

$$x^2 - p = aq.$$

Az is lehet, hogy

$$y^2 - q = bp.$$

A két lehetőség között összefüggést találtak. Ha ugyanis p és q valamelyike $4a+1$ alakú, akkor vagy mindkét egyenletnek van megoldása, vagy egyiknek sincs; míg ha mindkettő $4a+3$ alakú, az egyik egyenlet megoldható, a másik pedig nem. Ezt a tételt hívják „reciprocitási tételnek" és a számelmélet legfontosabb, legtöbbet mondó tétele. Sokan észrevették, hogy a tételnek igaznak kell lennie, de bebizonyítani nem sikerült. A 18 éves GAUSS 1796 április l-én bebizonyította, amint maga mondja megfeszített gondolkodás után. A bámulatosan éleselméjű bizonyítást azért ma is „GAUSS-féle erőpróbá"-nak nevezik. GAUSS később még 7 bizonyítást adott rá, ezekkel a tételt már könnyűvé tette. Ma kb. 70 bizonyítása ismeretes – ami a tétel nagy jelentőségét mutatja –, a harmadik és az ötödik GAUSS-féle bizonyítás egy-egy egyszerűsítését adta RÉDEI LÁSZLÓ szegedi Kossuth-díjas egyetemi tanár is.

GAUSS 18 éves korában vezetett naplója jóformán naponként új matematikai felfedezésről számol be.

Cikkünk elején említettük az algebrai egyenleteket. Már a 17. század elején gyanították, hogy a komplex számok körében minden egyenletnek van gyöke. Ezt a tételt alapvető fontossága miatt az algebra alaptételének hívjuk, de közel 200 éven át senki sem tudta bebizonyítani. Az első bizonyítást a 22 éves GAUSS adta. 24 éves korában jelent meg (de már évekkel azelőtt írta) Disquisitiones Arithmeticae című könyve, mely az új felfedezések hosszú sorát tartalmazza és a számelmélet mai napig is fennálló, talán évszázadokra szóló rendszerét alapította meg.

GAUSS hatalmas életművéből még csak egy teljesítményét említjük. Ő az elektromos távíró feltalálója. Mint kényelmes öregúr a zimankós téli időben nem akart kijárni, de a távollévő fizikai laboratóriumban folyó mérések igen érdekelték, tehát feltalálta a távírót. Üzleti érzéke azonban nem volt, mert találmányát csak jóval később egy amerikai mérnök (MORSE) értékesítette üzletileg.

6. A 19. században már több fiatalon feltűnt matematikussal találkozunk.

BRIANCHON (francia, ejtsd Brianson) 1806-ban mint műegyetemi hallgató fedezte fel a kúpszeletelmélet egy fontos tételét, mely szerint a kúpszelet körül írt hatoldal átellenes csúcsainak 3 összekötő egyenese ugyanazon pontban metszi egymást. Mint látjuk ez megfelel a PASCAL tételnek, de a belső összefüggést (a dualitás elvét) akkor még nem tudták.

7. Niels Henrik ABEL (norvég, 1802 – 1829) a legnagyobb matematikusok egyike, aki valaha élt.

Említettük, hogy FERRARI a negyedfokú egyenletet megoldotta. Utána majdnem 300 évig minden kitűnő matematikus megpróbálkozott az 5-ödfokú egyenlet megoldásával. Hiába! ABEL is, még 20 éves kora előtt, de csakhamar megtalálta a hibát és bebizonyította, hogy elődei lehetetlent hajszoltak. Az ötöd és magasabb fokú egyenletet általában nem lehet gyökjelekkel megoldani. ABEL autodidakta, az ő idejében a norvég egyetemen még nem tanítottak matematikát. Többi felfedezése a legmagasabb matematikába tartozik, ezért nem beszélhetek róluk részletesebben. Csak annyit, hogy ő bizonyította be a binomiális tételt tetszőleges komplex kitevőre. Magas növésű, hajlott járású fiatalember volt. Amikor Párisban LEGENDRE híres matematikust – aki akkor az Ecole polytechnique vizsgáló biztosa volt – felkereste, Legendre azt hitte, hogy a félszeg fiatalember vizsga iránt érdeklődik, ABEL, aki akkor még nem jól tudott franciául, azt válaszolta, „nem vizsga, matematika".

ABEL a kapitalizmus áldozata, rettenetes nyomora miatt tüdővészbe esett és meghalt 27 éves korában. Berlini egyetemi tanárrá történt kinevezését csak halálos ágyán tudta meg. Ma a norvég nemzet legnagyobb fiának tekinti. Szobra ott áll Osloban. ABEL a modern matematika egyik megalapítója, hatása ma is eleven és ösztönző.

8. Peter Gustav LEJEUNE-DIRICHLET (ejtsd Dirichlé, francia emigráns családból származó német, 1805 – 1859) is 20 éves korában 1825-ben tűnt fel azzal, hogy először bizonyította be FERMAT híres 17. századbeli matematikus egy tételét, mely szerint

$$x^5 + y^5 = z^5$$

határozatlan egyenlet egész számokban lehetetlen. DIRICHLET ekkor HUMBOLDT híres német természetbúvár párisi házában volt nevelő. Ezen munkája következtében kinevezték a breslaui egyetem tanárává. DIRICHLET a matematika legkiemelkedőbb klasszikusai közé tartozik, GAUSS méltó utóda a göttingeni egyetem tanszékén. Hatása ma is igen nagy és ösztönző. Tételei közül csak azt említhetem fel, mely szerint minden számtani sor, melynek kezdő tagja és különbsége relatív prim, végtelen sok törzsszámot tartalmaz.

9. A magyar BOLYAI Jánosról (szül. 1802, megh. 1860) csak igen röviden emlékezem meg. A folyó évben lesz születésének 150. évfordulója, ebből az alkalomból lapunk is részletesebben fogja munkásságát ismertetni.

Apja, BOLYAI Farkas is tehetséges matematikus volt. Egyetemi hallgató korában GAUSS-szal kötött barátságot. Képzelhetően nagy örömmel látta, hogy fia már 4 – 5 éves korában mély matematikai érdeklődésről tett tanúságot. Hamar el is kezdte rendszeresen tanítani. Ő maga jegyezte fel ezekről a tanításokról: „Mint az ördög elémbe ugrott és hajszolt, hogy menjek tovább". Nagy felfedezéséről, a nem-euklidesi geometriáról később bővebben fogtok olvashatni. Erre a felfedezésre, melyet LOBACSEVSZKIJ kitűnő orosz matematikussal körülbelül egy időben egymástól függetlenül tettek, 21 éves kora előtt jött rá. Felfedezésének jelentőségét saját szavaival jellemezhetjük legjobban. Készülőben volt műve, mikor ezt írta Temesvárról apjának 1823-ben: „Még nincs meg, de ... felséges dolgokat hoztam ki ... Semmiből egy új más világot teremtettem."

BOLYAI tisztában volt teljesítménye értékével, azért igen fájdalmasan érintette az elismerés teljes elmaradása. GAUSS, akinek művét elküldte, harmadik személyekkel szemben úgy nyilatkozott, hogy a fiatal Bolyait elsőrangú genienek tartja, de szemközt meglehetős tartózkodó maradt.

Életében hazájában is mellőzték. Vidéki magányában sivár és szomorú élete volt, míg az egyetemen jelentéktelen emberek működtek; sikertelensége lesújtotta az elmebetegség határáig. Az elismerés csak jóval halála után érkezett. Ma matematikai társulatunk is az ő nevét viseli. Címében díszül az ő nevét viseli, a Marosvásárhelyen – ahol élete lefolyt – lévő romániai magyar egyetem is.

10. Ismét tragikus sorsú fiatal ember élettörténetét fogom most elbeszélni. Évariste GALOIS (francia, ejtsd Gáloá, az első á rövid, 1811 – 1032) élt 20 évet! Összes művei elférnek egy 60 oldalas vékony füzetben, de ez a kevés oly sok, hogy vannak, akik még GAUSS-nál is többre becsülik.

16 éves korában fejezi be a középiskolát. Középiskolás korában is megjelent egy dolgozata, melyben azt bizonyította be, hogy a másodfokú egyenlet két gyökének lánctört kifejtésében a szakasz ugyanazon számokból áll, csak fordított sorrendben. Már akkor kezdett foglalkozni azzal a problémával is, melynek megoldása nevét halhatatlanná tette. Minden vágya az volt, hogy az École Polytechnique-be bejusson. (Párisban akkor két főiskola működött, az École Polytechnique műegyetem-féle volt és forradalmi szellemű iskola, az École Normale Superieure tanárképző és akkor reakciós szellemű volt.) Az érettséginek megfelelő vizsgát, a Bakkalaureátust Franciaországban akkor is, most is az egyetemen kell letenni. Galois-t kétszer buktatták meg ezen a vizsgán – matematikából, mert saját felfedezéseiről akart beszélni a középiskolai tananyag helyett. Így csak 1829-ben került az École Normale-ra. A forradalmi mozgalmakban továbbra is élénk részt vett, egyszer be is börtönözték, de felmentették. Nagy művével később is mindenütt visszautasították, sehogysem tudta elérni, hogy megjelenhessék.

Elkeseredésében alig foglalkozott matematikával. Egy párbajba keveredett. A párbaj előestéjén Galois úgy látszik, megbánta hevességét, halálsejtelmei támadtak, mélyen megindító levelet írt egyik barátjának, melyben bevallja, hogy nemcsak forradalmár, hanem matematikus is, elmondja nagy felfedezéseit, terveire is célzást tesz, amelyeket már nem volt ideje kidolgozni. Galois a párbajban elesett.

14 évvel halála után jelent meg először műve, de ekkor is homályosnak, érthetetlennek tartották. Azzal a kérdéssel foglalkozott, hogy egy algebrai egyenlet milyen esetben oldható meg négy alapművelet és gyökvonás véges számú alkalmazásával. (Hasonlóan, amint ez másod, harmad és negyedfokú egyenletnél általánosan lehetséges, viszont, mint Abel vizsgálataival kapcsolatban említettük, ötödfokú egyenletre általában nem található ilyen megoldás.) Ennek a kérdésnek eldöntésére új tudományágat kellett megteremtenie Galois-nak és ettől idegenkedtek annyira a matematikusok, bármilyen világosan írta is meg vizsgálatait. Ez kergette elkeseredésbe és oly fiatalon halálba Galois-t. Új elmélete, a csoportelmélet azóta a matematika majdnem minden területén alkalmazhatónak bizonyult. A „Galois-elmélet" örökre őrzi a fiatalon meghalt tudós nevét.

11. Említettem már, hogy Franciaországban az érettségit az egyetemen tartják. 1840-ben az École Polytechnique bakkalaureátusán feltűnt egy fiatal ember Charles HERMITE (ejstd Ermit, 1822 – 1901) aki a zárthelyi vizsgán egy nevezetes új tételt fedezett fel, mely szerint, ha az algebrai egyenlet négy egymásután következő együtthatója számtani sorozatot alkot, akkor az egyenletnek vannak komplex gyökei. HERMITE a 19. század derekának legkiválóbb francia matematikusa, aki szeretetreméltósága miatt az egész világon népszerű. Csak egy-két felfedezéséről beszélhetek. Ő bizonyította be először, hogy a természetes logaritmusok alapszáma $e = 2{,}71828\ldots$ nem tehet eleget egyetlen algebrai egyenletnek sem. Módszerének továbbfejlesztésével bizonyította be 1882-ben LINDEMANN (német, 1852 – 1939) ugyanazt a π számról, amivel a körnégyszögesítés híres ókori problémáját megoldotta. HERMITE oldotta meg az ötödfokú egyenletet, persze nem gyökjelekkel, hanem a felsőbb mennyiségtan körébe tartozó függvényekkel.

12. A francia egyetemi hallgatók lapjában 1852-ben megjelent egy feladat, melyet E. LAGUERRE (ejtsd Lagerr, 1836 – 1886) 16 éves fiú tűzött ki. A tételt, amelyet kimond, ma is alapvető tételnek tekintik a geometriában. A tétel annyira a felsőbb matematikába tartozik ma is, hogy nem ismertethetem. Itt is valóságos természeti csodával állunk szemben, mert a tételhez a rendkívüli invención kívül oly sok ismeret szükséges, ami ma sem általános, hogy szinte érthetetlen, honnan tudhatta mindezt 100 évvel ezelőtt egy 16 éves fiú. A tétel egyszersmind a fantázia és a matematikai teremtő erő egyik ragyogó példája. Szerzője később nagy katonai karriert futott be – ez francia matematikusoknál gyakori, mert az École Polytechnique egyszersmind a katonatiszti pályára is előkészít – és nagy matematikai felfedezéseket tett, amelyek még ma sincsenek teljesen kiaknázva.

Mint a legtöbb tudományban, a matematikában is a múlt század második felében nagy mértékben meggyorsult a fejlődés. Tudományos folyóiratok indulnak egyre nagyobb számban és a világ minden táján a tudósok százainak munkájából rengeteg új eredmény születik. Végre megindul és rövid idő alatt igen erősen kiterebélyesedik a matematikai élet hazánkban is. Nehéz volna mindenkit felsorolni, aki fiatalon nagy eredményeket ért el. Elsősorban a magyarokra fogjuk figyelmünket fordítani.

13. A francia Akadémia 1880-ban kitűzte megoldásra a számok 5 négyzetszám összegére bontásának problémáját. A pályázatra két igen jelentékeny mű érkezett, az egyiket egy igen koros angol professzor, a másikat Hermann Minkowski (ejtsd Minkovszki, orosz születésű német, 1864 – 1909) első éves egyetemi hallgató küldte be. Az akadémia mindkettőt kitüntette. Az időben a franciákat eltöltötte a bosszú szelleme a „revanche" az 1871. évi vereség miatt és mindent gyűlöltek, ami német. A soviniszta sajtó megtámadta az Akadémiát, amiért német nyelvű pályamunkát jutalmazott. A bizottság elnöke azonban azzal utasította vissza a támadást, hogy oly fontos, annyira kiemelkedő dolgozatot, aminő Minkowskié nem lehet formahiba miatt mellőzni. A fiatal szerzőnek pedig ezt írta: „... dolgozzék, hogy nagy matematikus legyen!" Minkowski megfogadta a tanácsot. A már említett Hermite útján haladt tovább. Az újabb kor nagyjai közé számít. Pályadolgozata nagy tudományos felkészültséget igényelt. Még csak azt említem meg, hogy Minkowskinak része van a mai fizikában uralkodó relatívitási elmélet megalapításában is.

14. Igen fiatalon érte el első komoly eredményét Fejér Lipót (szül. 1880, ma a budapesti egyetem Kossuth-díjas tanára) a mai magyar matematikai életnek Riesz Frigyessel együtt legnagyobb büszkesége. Nevüket világszerte jól ismerik és elismerik. Fejér már az 1897. évi Eötvös versenyen feltünt, (ezek folytatása a mai Kürschák verseny) a kitűzött tételnél jóval többet bizonyított be. 1900-ban pedig, még mint egyetemi hallgató felfedezett egy tételt, mely a francia akadémia lapjában jelent meg és nevét egyszerre világhírűvé tette. A tétel a felsőbb mennyiségtanba tartozik, így nem ismertethetem, jelentősége felmérhetetlen, többszáz kötetnyi irodalma van és Fejér óriási munkásságának egyik legszebb gyöngyszeme.

Egyik ragyogó ifjúkori teljesítményét azonban, amely harmadéves egyetemi hallgató korából való, mindnyájan megismerhetitek. A berlini egyetemen a híres H. A. Schwarz professzor bemutatta azt az elemi tételt, mely szerint a háromszögbe beírt háromszögek közül a magassági talppontok háromszögének van a legkisebb kerülete. Schwarz a bizonyítást 6 tükrözéssel végezte. Az óra végével Fejér hozzámegy és bemutatja az óra alatt talált bizonyítását, mely két tükrözéssel ér célt. Schwarz erre megkérdi, „és mi van a tetraéderrel?" Fejér 2 perc gondolkodás után mondta: az enyém a térben is érvényes. Ezt a szép és egyszerű bizonyítást megtalálhatjátok az I. gimnázium tankönyvében. Fejér azóta is megőrizte az elemi geometria iránti érdeklődését.

15. Ismét szomorú hangot kell megütnöm. Szuszlin-ról kell megemlékeznem, aki mint moszkavi diák H. Lebesgue-nek, (ejtsd Löbeg) századunk egyik korszakalkotó nagy matematikusának dolgozatában talált hibát. Lebesgue franciához illő szellemességgel írta később „bizonyításom egyszerű, rövid–de hamis volt." Szuszlin és tanára eleinte azt hitték, hogy a hibát könnyű kijavítani, de aztán kiderült, hogy súlyos problémára bukkantak, melynek megoldása egy egész elméletet hozott létre. Ezt az elméletet az ú. n. „moszkvai iskola" fejlesztette ki. Az erről szóló könyv előszavában öngúnnyal írja Lebesgue: „Mindazon problémák eredete, melyekről itt (az illető könyvben) szó lesz, dolgozatom egy durva tévedése ... Termékeny tévedés, szerencsés ihletemben követtem el."

A nagy és lényeges fejlődést a moszkvai diák éles szeme indította el, aki a világszerte ünnepelt matematikus művében meglátta a hibát. Az ifjú nagyjelentőségű dolgozatát nem követte több. A fiatal szerző 1919-ben a harctéren elesett.

16. Nem kevésbbé szomorú Pável Szamnikovics Uriszon sorsa sem. (1898-1924). Fizikusnak indult és egyetemre kerülve, 17 éves korában már kinyomatásra érdemes eredményeket ért el, de érdeklődése a matematika felé vonzotta. Itt is voltak már hallgató korában önálló eredményei. Eredményeiről e helyen nem beszélünk részletesebben, mert sok előismeretet igényelnének, pedig igen egyszerű geometriai fogalmaknak, mint a dimenzió, a görbe stb. fogalmának pontos meghatározása és általánosítása körül forognak, 1923-ban Göttingában tartott előadásai magukra vonták a kor legnagyobb matematikusának, Hilbertnek a figyelmét is. A geometria egyik modern ágának a topológiának a leghíresebb XX. századi művelői közé tartozik. Érdeklődése igen sokoldalú volt. A természettudományok mellett érdeklődött nyelvtudományok iránt. Szerette a művészetet, különösen a zenét és szerette a természetet. 1924 nyarát a Bretagne félsziget Batz nevű fürdőjében töltötte. Egyik dolgozatának befejezése után fürdőzés közben egy sziklához ütődő hullám okozta fiatalon halálát. Ilyen fiatalon is már 2 vastag kötetre menő jelentős tudományos munka maradt utána.

17. Neumann János (sz. 1903.) a csodagyermekek közé tartozott. Mint VI. (mai II.) gimnazistának jelent meg Fekete Mihály egyetemi tanárral együtt írt önálló matematikai felfedezése. A hozzáfűzött nagy reményeket beváltotta, még 30 éves kora előtt a berlini egyetem tanára. Itthon az akkori viszonyok között nem érvényesülhetett. A mai matematikusok élgárdájához tartozik, de érdeklődése és képessége ma szokatlanul széleskörű, a fizikára, sőt a kémiára is kiterjed.

18. Igen fiatalon kezdte tudományos munkásságát Andrej Nikolájevics Kolmogorov akadémikus is (sz. 1903). Nevét már talán hallották többen is közületek. A valószínűségszámítás szigorú megalapozásával adott új irányt ennek a tudományágnak, amelyet azután maga is igen jelentős eredményekkel gazdagított. Első dolgozatai 20 éves korában jelentek meg. I. Ja. VERCSENKÓval közösen elért eredményei két változós függvények szakadási helyeivel foglalkoznak.

19. A következő, akiről beszélni akarok, ismét egy rendkívül fiatalon feltünt szovjet matematikus, Lew Genrikovics SNYIRELMAN (1905 – 1938). Már 12 éves korában szokatlan matematikai képességeket tanúsított és önálló vizsgálatai is voltak az algebrai egyenletek köréből. 16 éves korában a moszkvai egyetemre kerül és azt 2 és fél év alatt végzi el. Mint aspiráns L. A. Ljuszternyikkel együtt dolgozik a geometria és a variációszámítás területén. Megoldanak többek közt egy Poincaré által felvetett régóta megoldatlan problémát. 1929-ben, 24 éves korában SNYIRELMAN professzor lesz Novocserkaszban. Itt kezd számelmélettel foglalkozni, amiben leghíresebb eredményeit éri el. Goldbachtól ered az a sejtés, hogy minden 2-nél nagyobb páros szám felírható 2 priorszám összegeként minden 3-nál nagyobb páratlan szám pedig három primszám összegeként. SNYIRELMAN-nak sikerült elemi módszerekkel annyit megmutatnia, hogy van olyan N szám, hogy minden egészszám felírható, legfeljebb N-számú primszám összegeként. Módszere egész új utat nyitott meg a kérdés vizsgálatában, amit követői tovább javítottak és ezzel a Snyirelmanénál kisebb értéket sikerült elérni N számára. Az akkori legkiválóbb német tudósok egyike mondotta SNYIRELMAN munkájáról, hogy a számelmélet legnagyobb haladása, amelyet századunkban elért. (Megjegyezzük, hogy egy más úton haladva I. M. VINOGRADOV akadémikus lényegében bebizonyította Goldbach páratlan számokra vonatkozó sejtését. Megmutatta, hogy van olyan szám, amelytől kezdve minden páratlan szám 3 primszám összegére bontható.)

20. HAJÓS György (szül. 1912) Kossuth-díjas egyetemi tanár már mint VI. (mai II.) gimnazista megoldja az érettségizettek számára rendezett Eötvös-verseny feladatait. Másodéves korában találta MINKOWSKI egy szép tételének legegyszerűbb bizonyítását, mely azóta a tankönyvekbe is átment. A tétel a következő: a sík azon pontjainak összeségét, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám rács-nak nevezzük, maguk a pontok a rácspontok. Ha a síkban megrajzolunk valamely az origóra nézve szimetrikus konvex idomot (akár sokszöget, akár görbét), melynek területes ≥ 4, ez legalább egy rácspontot tartalmaz az origón kívül.

HAJÓS eddigi legnagyobb eredménye is MINKOWSKI, egy sejtésének bebizonyítása, amelynek bizonyítását az igen kiváló matematikusok hosszú sora már 50 év óta kereste.

21. ERDŐS Pál (sz. 1913) nevét sok ifjú olvasónk ismeri. Első éves korában találta CSEBISEV híres tételének, mely szerint bármely 1-nél nagyobb szám és kétszerese között van priorszám, azt a teljesen elemi bizonyítását, melyet lapunk részletesen ismertetett. ERDŐS azóta is rendkívüli méretű tevékenységet fejt ki a matematika minden ágában, a szebbnél szebb felfedezések hosszú sorával gazdagította a matematikát.

22. Feladatom egyik igen szomorú részéhez érkeztem, amikor meg kell emlékeznem azokról a rendkívüli tehetségű fiatal matematikusokról, akiket a fasizmus 18 – 20 éves korukban meggyilkolt. Nagy részüknek az a hő vágya sem teljesült, hogy az egyetemre bejusson, mégis mint autodidakták is jelét adták ragyogó tehetségüknek. Nem sorolom fel neveiket. (TUBÁN Pál emlékezik meg róluk részletesebben a Matematikai Lapok I. évfolyamában.) Csak kettőt említek közülük, ÁDÁM István volt a legfiatalabb. Alig 19 éves korában érte a halál. De így is maradt utána néhány tehetségét világosan mutató eredmény. Egy geometriai bizonyítást említek, mely érdekes további vizsgálatok elindítója is lett. A bizonyítandó tétel a következő: a háromszög oldalait belülről érintő kör sugara legfeljebb fele lehet a körülírt kör sugarának. Írjunk ugyanis az oldalak felezőpontjai köré kört. Ennek sugara fele akkora, mint a körülírt köré, mert fele akkora háromszög köré van írva. Másrészt húzzunk ehhez a körhöz az eredeti háromszög oldalaival párhuzamos érintőket. Kapunk egy, az eredetinél nagyobb háromszöget, vagy legalábbis akkorát. Ennek a beírt köre sem lehet kisebb, mint az eredeti háromszögé és ezzel be is bizonyítottuk állításunkat. A bizonyítás értékét mutatja az is, hogy bárki könnyen átviheti – amint ÁDÁM is tette – tetraéderre (háromoldalú gúlára). A tétel más ismert bizonyításai erre nem alkalmasak.

23. SCHWEITZER Miklóst említem még közülük, mint a legifjabb generáció egyik legnagyobb ígéretét. Fiatal kora ellenére már számot tevő eredményeket hagyott hátra, melyek mély matematikai meglátások mellett igen komoly felkészültségről is tesznek tanúságot. A matematika társulat az egyetemi hallgatók számára évente rendezett versenyét SCHWEITZER emlékének szenteli. Jelentőségét eléggé mutatja az, hogy befejezetlenül maradt fő művét maga FEJÉR Lipót rendezte sajtó alá. Ezeknek a fiataloknak szomorú sorsa is örök vádlója lesz a fasizmus céltalan kegyetlenkedésének. Emlékükre gondolva álljon azonban példaképül előttünk az a kitartás és szorgalom is, amivel az egyetemen kívül rekedve is folytatták tanulmányaikat.

Elmondhatjuk, hogy a mai legifjabb generáció nem méltatlan emlékükhöz. Az 1950. évi első magyar matematikai kongresszusnak volt egyetemi hallgató előadója is; szorgalmasan dolgoznak aspiránsaink és egyetemi hallgatóink is. Egy későbbi hasonló természetű cikk bizonyára már újabb neveket említhet majd.

24. A cikk tárgyához méltóan ismét egy igen korán feltűnt matematikussal zárjuk a sort. I. R. SAFAREVICSCS 16 éves korában nem csak a középiskolát fejezte be, hanem matematikai ismereteit olyan érettnek találták, hogy az egyetem hallgatása nélkül egyenesen aspiránsnak vették fel. Vizsgálatairól itt nem beszélhetek, mert azok az algebra és számelmélet igen elvont továbbfejlesztésére vonatkoznak, de jelentőségüket megítélhetjük abból is, hogy egyik dolgozatát a magyar-matematikus-kongresszuson maga A. N. KOLMOGOROV akadémikus mutatta be. Az alig 26 éves matematikus máris messze földön ismertté tette nevét.

Sokáig sorolhatnám még fel a fiatalon feltűnt matematikusokat, de az eddigiek is meggyőzhetnek arról, hogy a matematika tudománya mekkora lehetőséget nyújt már a legfiatalabbaknak is.