A kéttagú vagy binom kifejezések általános alakja: $a+b$. E kifejezések 2. és 3. hatványát még az általános iskolában, többtagúak szorzataként határoztuk meg:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ezek az azonosságok tartalmazzák a kéttagú (és egyben a többtagú) algebrai összegek négyzetreemelésének, illetőleg köbreemelésének szabályait. (Numerikus számok négyzetre és köbreemelésénél előnyösebb ezen azonosságokat némi módosítással használni.)

Az alapot képező kéttagú kifejezés: $a+b$ mindegyik tagja elsőfokú, a második hatvány mindhárom tagja másodfokú, a harmadik hatvány mind a négy tagja harmadfokú. Az olyan többtagút (vagy polinomot), melyben mindegyik tag fokszáma ugyanaz, „homogén”-nek nevezzünk. Tehát $a+b$: kéttagú, elsőfokú homogén kifejezés, $a+b$ négyzete: homogén másodfokú háromtagú kifejezés. Azt is észrevesszük a kifejezések fenti leírásában, hogy az a kitevői tagonként eggyel csökkennek, míg az utolsó tagban $a^0 = 1$ szerepel. A b kitevője viszont az első tagban $0 (b^0 = 1)$ és onnan kezdve b kitevői tagonként eggyel nőnek. E kifejezések tehát rendezett kifejezések, mégpedig a-nak fogyó és b-nek növekvő hatványai szerint vannak rendezve. Nyilvánvaló, hogy ha egy két számból alkotott homogén polinomot az egyik szám fogyó hatványai szerint rendezünk, akkor az a kifejezés szükségképpen egyidejűleg a másik szám növekvő hatványai szerint rendeződik. $2x^3y^4 + 5x^5y^2 - 3xy^6$ 3 tagú homogén 7-edfokú nem rendezett kifejezés; x fogyó hatványai szerint rendezve: $5x^5y^2 + 2x^3y^4 - 3xy^6$. $5m^3p^2 - 4m^2p + mp - 5p^3$ egy négytagú m fogyó hatványai szerint rendezett nem homogén kifejezés. Viszont $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ négytagú, a-nak fogyó (és b-nek növekvő) hatványai szerint rendezett homogén harmadfokú összeg.

Most felvetjük a kérdést, hogyan alkotjuk meg valamely kéttagú kifejezés magasabb hatványait? Tehát kérdés hogyan alakítható polinommá $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ s. i. t., általában $(a+b)^n$?

Közelfekvő az a sejtés, hogy ezek is homogén összegek lesznek, melyek szintén az első tag fogyó (és ugyanakkor a második tag növekvő) hatványai szerint rendezve írhatók fel. Pl. $(a+b)^6$ tagjai így fognak festeni: a^6, a^5b, a^4b^2, a^3b^3, a^2b^4, ab^5 b^6 csak az együtthatókat fedi még homály. Igaz, hogy lépésről lépésre haladva, sorozatos szorzással ezek is meghatározhatók. Pl.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) =$$
$$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\cdot(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b)$$

stb. Ez azonban – eltekintve attól, hogy igen hosszadalmas és fáradságos eljárás, főleg, ha a kitevő már elég nagy szám – nem oldja meg az általánosan felvetett problémát, t. i. hogyan bontható tagokra $(a+b)^n$, ahol n *tetszőleges* természetes szám. Egy olyan általános érvényességű számolási eljárást (vagy algoritmust) keresünk tehát, melynek alapján valamely binom bármely hatványának kifejtését közvetlenül felírhatjuk.

Az alábbiakban nemcsak azt fogjuk kimutatni, hogy a fent közölt sejtés az egyes tagok alakját illetően igaz, hanem az együtthatók kérdését is megoldjuk úgy, hogy képesek leszünk bármely kéttagú kifejezés akárhányadik hatványát felírni, *anélkül, hogy a megelőző alacsonyabb hatványokat kiszámítanók.*

Induljunk ki egy konkrét példából. Próbáljuk meghatározni közvetlenül $(a+b)^6$ polinomba fejtését.

$$(a+b)^6 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

A többtagúak szorzási szabálya alapján a^6 csak úgy keletkezhet, hogy minden tényezőből az első tagot választjuk ki és ezeket összeszorozva kapjuk meg az egyetlen a^6 alakú tagot, tehát a^6-nak együtthatója 1. a^5b úgy jön létre, hogy egy-egy tényezőből választjuk ki a b-t, a többi tényezőből pedig esetről esetre az öt a-t. Tehát annyiszor fog fellépni az a^5b tag, ahányféleképpen a 6 tényezőből a b kiválasztható, vagyis $C_6^1 = \binom{6}{1}$-szer. Ha ezt a $\binom{6}{1}$ számú a^5b tagot összevonjuk, kapjuk $\binom{6}{1}$ a^5b vagyis az a^5b alakú tag együtthatója $\binom{6}{1}$.

Az a^4b^2 tagok úgy jönnek létre, hogy a hat tényező közül 2 – 2-ből választjuk ki a b-t és mindegyik esetben a többi négy tényezőből az a-t, vagyis annyi a^4b^2 tagunk lesz, ahányféleképpen a 6 tényezőből kettőt-kettőt ki tudunk választani, vagyis $C_6^2 = \binom{6}{2}$ lesz az a^4b^2 tagok száma és összevonás után $\binom{6}{2}$ lesz az a^4b^2 alakú tag együtthatója. Ezt a gondolatmenetet folytatva (1. egyébként „A kombinatorika elemei” című cikkben közölt példát is. – IV. köt. 2. sz. 45. old.) nyerjük, hogy

$$(a+b)^6 = a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6.$$

Ugyanaz a gondolatmenet azonban úgyszólván szóról szóra alkalmazható általában, ha 6 helyett egy tetszőleges n pozitív egész kitevőt tekintünk, vagyis

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Tételünk bizonyítását egészen szigorúvá tehetjük, ha most a teljes indukcióhoz folyamodunk, ami annál is inkább érdemes, mert ezzel egyúttal az együtthatóknak egy fontos tulajdonságát is bebizonyítjuk.

Tegyük tehát fel, hogy a fenti azonosságunk az n természetes számra igaz. Ha ezen azonosság mindkét oldalát $(a+b)$-vel megszorozzuk, akkor

$$(a+b)^n(a+b) = (a+b)^{n+1} = \Bigg[a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots +$$
$$+ \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\Bigg](a+b).$$

A jobboldalon a szorzást tagonként elvégezve:

$$a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \ldots +$$
$$+\binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n + a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \ldots +$$
$$+\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

Az egynemű tagokat összevonva, vagyis kiemeléssel szorzattá alakítva nyerjük, hogy

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)a^n b + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2 + \ldots +$$
$$+\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]a^{n-k+1}b^k + \ldots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}.$$

De
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\cdot 2\ldots(k-1)} +$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots(k-1)\cdot k} =$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)k + n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}.$$

A számlálóban az $n(n-1)\ldots(n-k+2)$ közös tényező kiemelve:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)\big[k+(n-k+1)\big]}{k!} =$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{k!} = \binom{n+1}{k}$$

és így $\left[\text{ tekintetbe véve, hogy } n+1 = \binom{n+1}{1} \text{ és } \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1\right]$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots +$$
$$+\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k + \ldots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha tételünk n-re igaz, akkor $(n+1)$-re is igaz, de $n=2$-re is igaz, mert hiszen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2,$$

azért minden n kitevőre is érvényes, ahol n természetes szám.

Tehát

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

ahol az $\binom{n}{k}$ szimbolumok $k = 1, 2, \ldots, n$-re rendre kiszámíthatók.

Pl.

$$(a+b)^7 = a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \\ + \binom{7}{5}a^2b^2 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7,$$

ahol $$\binom{7}{1} = 7, \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21, \binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 7\cdot 5 = 35,$$
$$\binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35, \binom{7}{5} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 21,$$
$$\binom{7}{6} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 7, \binom{7}{7} = 1,$$

és így $$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Az $\binom{n}{k}$ számokat $k = 1, 2 \ldots n$, melyek a binom n-edik hatványában a tagok együtthatói, az n-edik hatvány *binomiális együtthatóinak* szokás nevezni. Figyeljük meg, hogy mindenegyes tagban (az első tag kivételével) a második (növekvő kitevőjű) tényező kitevője megegyezik az együtthatót jelző szimbolum alsó számával. Az említett kivételt is megszüntethetjük, ha az a^n első tagot $a^n b^0$-ként fogjuk fel és együtthatóját, a többi együtthatónak megfelelően, $\binom{n}{0}$-val jelöljük. $\binom{n}{0}$ nincs értelmezve, mert annak a kérdésnek nincs értelme, hogy hogyan lehet adott elemek közül egyet sem választani ki. Az egységesség és egyszerűség kedvéért azonban $\binom{n}{0}$-t, ahol n tetszésszerinti természetes szám, úgy értelmezhetjük, hogy $\binom{n}{0} = 1$, és akkor elértük azt, hogy általános érvényességgel kimondhatjuk, hogy $(a+b)^n$ tehát $(n+1)$ tagból álló homogén n-edfokú összeg a-nak fogyó (és b-nek növekvő) hatványai szerint rendezve, az együtthatók rendre $\binom{n}{k}$, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Ez a tétel *„binomiális tétel”* néven ismeretes.

Lássunk néhány példát:

a) $$(x^2-2)^6 = \binom{6}{0}(x^2)^6(-2)^0 + \binom{6}{1}(x^2)^5(-2) + \binom{6}{2}(x^2)^4(-2)^2 + \\ + \binom{6}{3}(x^2)^3(-2)^3 + \binom{6}{4}(x^2)^2(-2)^4 + \binom{6}{5}x^2(-2)^5 + \binom{6}{6}(-2)^6 = \\ = x^{12} - 12x^{10} + 60x^8 - 160x^6 + 240x^4 - 192x^2 + 64.$$

Vegyük észre, hogy ha a kéttagú tagjai ellenkező előjelűek, akkor a többtagúban a tagok *váltakozó* előjelűek.

b) Mekkora $(u+v)^{19}$ többtagújában $u^{12}v^7$ alakú tag együtthatója? Az együttható nyilván

$$\binom{19}{7} = \frac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} = 19\cdot 3\cdot 17\cdot 4\cdot 13 = 50\,388.$$

c) Határozzuk meg $\left(a\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a}}{x}\right)^9$ többtagú negyedik tagját.

A negyedik tag:

$$\binom{9}{3}(a\sqrt{x})^6\left(-\frac{\sqrt{a}}{x}\right)^3 = 84a^6x^3\left(-\frac{a\sqrt{a}}{x^3}\right) = -84a^7\sqrt{a}.$$

d) Számítsuk ki 101-nek ötödik hatványát.

$$(10^2+1)^5 = \binom{5}{0}(10^2)^5 + \binom{5}{1}(10^2)^4 + \binom{5}{2}(10^2)^3 + \binom{5}{3}(10^2)^2 + \binom{5}{4}10^2 + \binom{5}{5} =$$

$$= 10^{10} + 5\cdot 10^8 + 10\cdot 10^6 + 10\cdot 10^4 + 5\cdot 10^2 + 1 =$$

$$\begin{array}{rrrrl} =10 & 000 & 000 & 000 & + \\ & 500 & 000 & 000 & \\ & 10 & 000 & 000 & \\ & 1 & 00 & 000 & \\ & & & 500 & \\ & & & 1 & \\ \hline 10 & 510 & 100 & 501 & \end{array}$$

e) Számítsuk ki $0{,}97^{10}$ értékét 4 tizedesjegyig terjedő pontossággal

$$(1-3\cdot 10^{-2})^{10} = 1 - \binom{10}{1}3\cdot 10^{-2} + \binom{10}{2}3^2 10^{-4} -$$
$$-\binom{10}{3}3^3\cdot 10^{-6} + \binom{10}{4}3^4\cdot 10^{-8} - \ldots$$

a többi tag elhanyagolható, mert könnyen belátható, hogy a tagok abszolút értéke csökken és így a váltakozó előjel miatt az elkövetett hiba abszolút értéke kisebb az első elhanyagolt tag abszolút értékénél. Jelen esetben az első elhanyagolt tag abszolút értéke

$$\binom{10}{5}3^5\cdot 10^{-10} = 252\cdot 243\cdot 10^{10} = 0{,}0000061236$$

már nem befolyásolja a negyedik tizedes jegyet.
Az első 3 pozitív tag összege:

$$1 + 45\cdot 9\cdot 10^{-4} + 210\cdot 81\cdot 10^{-8} = 1 + 0{,}0405 + 0{,}00017010 \approx 1{,}04067$$

Az első két negatív tag abszolút értékének összege

$$10\cdot 3\cdot 10^{-2} + 120\cdot 27\cdot 10^{-6} = 0{,}30 + 0{,}003240 = 0{,}303240$$

Ezek szerint tehát
$0{,}97^{10} \approx 1{,}04\,067 - 0{,}30324 = 0{,}73743$, vagyis 4 tizedes jegyig terjedő pontossággal $0{,}97^{10} \approx 0{,}7374$.

Ezzel az eljárással bármely hatvány értéke mindenkor *tetszőleges pontossággal* határozható meg, míg logaritmustáblával való kiszámításnál az elkövetett hiba annál nagyobb, minél nagyobb a kitevő.

Most a binomiális együtthatóknak néhány érdekes tulajdonságára kívánunk még rámutatni.

1. Már az $(a+b)$ négyzeténél, köbénél és 7-ik hatványánál észrevehettük, hogy az együtthatók sora balról jobbra olvasva ugyanaz, mint jobbról balra olvasva. Ez természetesen következik a szimmetriaviszonyokból, t. i. abból, hogy $(a+b)^n = (b+a)^n$. De közvetlenül is bebizonyíthatjuk, hogy az elölről számított $(k+1)$-edik tag együtthatója $\binom{n}{k}$ egyenlő a hátulról számított $(k+1)$-edik binomiális együtthatóval $\binom{n}{n-k}$-val, ahol $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

$$k=0 \quad \text{és} \quad k=n \quad \text{esetén} \quad \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$
$$k = 1, 2, \ldots, (n-1) \qquad \text{esetén pedig}$$
$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} \quad \text{és mivel} \quad V_n^k = \frac{P_n}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!},$$

azért

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ha itt most k helyett $(n-k)$-t írunk, akkor a nevező két tényezője cserélődik fel:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\big[n-(n-k)\big]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, vagyis $C_n^k = C_n^{n-k}$ abból az egyszerű meggondolásból is következik, hogy n elemből annyiféleképpen lehet k elemet kiválasztani, ahányféleképpen $(n-k)$ elemet visszahagyni és fordítva.[1]

Ha az $\binom{n}{k}$ szimbolumban $k > \frac{n}{2}$, akkor természetesen előnyösebb $\binom{n}{k}$ helyett a vele egyenlő $\binom{n}{n-k}$ kiszámítani. Pld. $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$, $\binom{9}{8} = \binom{9}{1} = 9$ stb.

2. A binomiális tétel fentebbi, teljes indukcióval való bizonyításánál láttuk, hogy az n-edik hatványban a k-adik és $(k+1)$-edik binomiális együttható összege egyenlő az eggyel magasabb hatvány $(k+1)$-edik együtthatójával, vagyis

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Ez az azonosság különben abból a meggondolásból is következik, hogy $n+1$ elemből úgy válaszhatunk k elemet minden lehetséges módon, hogy először az első n elemből választunk ki k elemet minden lehetséges módon, azután pedig az $(n+1)$-edik elemhez hozzáválasztunk $(k-1)$ elemet az első n elemből minden lehetséges módon. Ily módon megkapjuk az $n+1$ elem összes k-adosztályú kombinációit, tehát tényleg

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Ennek alapján a binomiális együtthatók egy sorából az eggyel magasabb hatvány binomiális együtthatói *egyszerű összeadással* képezhetők.

Pl. láttuk, hogy a 7-ik hatvány binomiális együtthatói

$$1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1$$

Azonosságunk alapján a 8-ik hatvány együtthatói:

$$1,\ 1+7,\ 7+21,\ 21+35,\ 35+35,\ 35+21,\ 21+7,\ 7+1,\ 1$$

vagyis

$$1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70,\ 56,\ 28,\ 8,\ 1$$

Ugyanígy képezhetők egyszerű kivonással a binomiális együtthatók egy sorából az eggyel alacsonyabb hatvány együtthatói. Pld. a 6 hatvány együtthatói:

$$1,\ 7-1=6,\ 21-6=15,\ 35-15=20,\ 35-20=15,$$
$$21-15=6,\ 7-6=1.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $(a+b)^0 = 1$, továbbá, hogy a binomiális együtthatók bármely sorában az első és utolsó együttható 1, akkor a 0-adik hatványtól kezdve a fentiek szerint egyszerű összeadással képezhetjük sorról-sorra az összes többi együtthatót. Ha az egyes sorokat rendre egymás alá írjuk, akkor a következő táblázatot nyerjük:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1 \\
\multicolumn{15}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

E táblázat (melyről az együtthatók 1. tulajdonsága is leolvasható) *„Pascal-féle háromszög”* néven ismeretes. (Pascal francia matematikus 1623 – 1662.)

3. Ha a Pascal-féle háromszögben az egyes sorokat összeadjuk rendre a következő összegeket kapjuk: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... stb. Ezek az összegek így is írhatók: $2^0, 2, 2^2, 2^3, \ldots$ Sejtjük tehát, hogy az n-edik hatvány binomiális együtthatói összege 2^n.

Hasonló alakú tagok összegét szoktuk úgy jelölni, hogy felírjuk a tagok általános alakját, eléje az összegezés jeléül egy nagy görög stigma betlit és jelöljük, melyik betű milyen értékeivel képzett tagokat kell összegezni. E jelölési módot

[1] Ezzel megoldását adtuk a 434. sz. feladatnak.

jelen esetünkre alkalmazva: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ (olvasd: „Szumma n alatta k ha k megy 1-től n-ig $=2^n$-nel”).
Más szóval ez azt jelenti, hogy 0-adik sor összege 1, és minden következő sor összege az előtte álló sor összegeinek kétszerese, vagyis e sor összegek mértani haladványt alkotnak, melynek első tagja 1 és hányadosa 2. Ha ezt szem előtt tartjuk, akkor ez a 3. tulajdonság közvetlenül következik a 2. tulajdonságból, mert hiszen minden sor belső tagjai úgy keletkeznek, hogy a felette álló sor minden tagját – a két szélső tag kivételével – kétszer vesszük összeadandónak, a két szélső tag (1 és 1) csak egyszer szerepel ebben az összeadásban. Ha most az új sorban a belső tagokat kiegészítjük a két szélső taggal $(1+1)$, akkor nyilvánvaló, hogy az új sor tagjainak összege a felette álló sor összegének kétszerese. De az első hatvány együtthatóinak összege 2, ezért a 2. hatvány együtthatóinak összege 4, a harmadik hatvány binomiális együtthatóinak összege $2\cdot 4=8$ stb.

Egy másik igen egyszerű bizonyítása tételünknek a következő:

Írjuk fel az

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n. \tag{1}$$

azonosságot, és helyettesítsünk $a=1$ és $b=1$-t, akkor

$$(1+1)^n=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

4. A binomiális együtthatók sorában a páratlan sorszámú együtthatók összege egyenlő a páros sorszámú együtthatók összegével.

Ugyanis helyettesítsünk az (1) alatti azonosságba $a=1$ és $b=-1$-t, akkor

$$(1-1)^n=0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}.$$

A negatív tagokat áthozva a baloldalra, nyerjük páratlan n esetén

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1},$$

és páros n esetén

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}=\binom{n}{6}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}.$$

Mivel a 3. tételünk értelmében a fenti azonosságokban a bal és jobb oldal összege 2^n, azért ezen azonosságok *mindegyik oldala külön-külön* $\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$

Rá akarunk még mutatni, hogy a binomiális együtthatók itt tárgyalt tulajdonságait azért lehetett olyan egyszerű alakban általános érvényességgel *megfogalmazni,* mert bevezettük az $\binom{n}{0}=1$ értelmezést.