

Két pont meghatároz egy egyenest. Három pont, mely nincsen egy egyenesen meghatároz 3 egyenest. Eddig minden közvetlenül, könnyen megszámlálható. Kérdés: 17 pont a síkban, melyek közül 3-3 nincs egy egyenesen, hány egyenest határoz meg? Itt most a pontpárok közvetlen megszámlálása már igen fáradságos volna és így *számlálás* helyett, *számításhoz* kell folyamodnunk. Jelen esetben a következő számítási módszer kínálkozik; számítsuk ki egy 17 szög oldalai és összes átlói számának összegét. Ismert képlet sze

$$17 + \frac{17(17-3)}{2} = \frac{17 \cdot 2 + 17 \cdot 14}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136.$$

Ha nem akarunk kész képletekre támaszkodni, rövidebben is célhoz érünk: minden pontot összekötve a többi 16 ponttal, nyilván $17 \cdot 16$ összekötést kapunk, de ezek közül 2-2 ugyanazt az egyenest szolgáltatja, és így az összes különböző egyenesek száma $\frac{17 \cdot 16}{2} = 136$. (Ez utóbbi okoskodásnak még az az előnye, hogy térbeli pontokra is alkalmazható, míg az előbbi megdolgolás térbeli pontok esetén csak síkra való vetítés közbeiktatásával vezet célhoz.) Az itt közölt két számítási módszer minden további nélkül általánosítható n pont esetére: $n + \frac{n(n-3)}{2} = n \left[1 + \frac{n-3}{2} \right] = \frac{n(n-1)}{2}$.

Itt tehát ha számlálással nem is, de számítással még boldogultunk.

Nem olyan egyszerű az eset, ha arról van szó, hogy n pont, melyek közül 3-3 nem fekszik egy egyenesen, hány háromszöget határoz meg. Ha a pontokat sorszámozzuk, akkor csak a sorszámok közül kell minden lehető módon hármasokat kiválasztani. A kérdés megoldása tehát ugyanaz, mint a következő: az 1, 2, ..., n természetes számokból, hány számhármast választható ki? $n = 4$ esetén még könnyen megszámlálható a kiválasztható 4 számhármast (123, 124, 134, 234), de ha n elég nagy szám, akkor a megszámlálás már fizikailag is lehetetlenné válik, viszont számításra most nem kínálkozik semmi az eddig tanultakból. Még komplikáltabb lesz feladatunk, ha folytatva az általánosítást azt kérdezzük, hogy n pont (melyek közül 3-3 nincs egy egyenesen) hány k szöveget ($k < n$) határoz meg, mert $k > 3$ esetén már a sorrend is szerepet játszik.

Egy másik ilyenfajta feladathoz vezet pl. a következő kérdés: $(x+1)^{10}$ -ben mi lesz x^4 -nek együtthatója? Ha hatványunkat 10 tényezősszorzatként fogjuk fel, nyilván x^4 úgy keletkezik, hogy tetszőleges 4 tényezőből x -et és a többi 6 tényezőből az 1-est szorzunk össze és így nyilván annyi x^4 tagot nyerünk, ahányféleképpen 4 tényezőt ki tudunk választani a 10-ből; jelöljük ezt a számot C_{10}^4 -zel. Ezt a C_{10}^4 számú x^4 tagot összevonva, x^4 -nek együtthatója éppen C_{10}^4 lesz.

Kissé más természetű a következő feladat: hányféle öt színű zászlót állíthatunk elő 10 különböző színből? Most nem csak az 5 szín kiválasztása játszik szerepet, de még az is számít, hogy az 5 kiválasztott színt, milyen sorrendben alkalmazzuk. Kicsiny számoknál a számlálás itt is közvetlenül elvégezhető (pl. 4 színből 12 féle 2 színű zászlót készíthetünk, a négy színt a, b, c, d -vel jelölve a lehetséges összeállítások: $ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc$), de a számok növekedésével a közvetlen megszámlálás módszere itt is csakhamar csődöt mond.

Azt hisszük már ez a kevés példa is meggyőzően mutatja, hogy szükség van általánosan alkalmazható számítási módszerekre, amelyekkel a fenti és ezekhez hasonló feladatokra könnyebben megadhatjuk a választ, mint azt az eddigi példákban láttuk. Az említett példák tulajdonságát abban fogalmazhatjuk meg, hogy azokban bizonyos szabályok szerint csoportokat alkottunk és a lehetséges csoportok számát akartuk meghatározni. Ehhez gyakran segítséget nyújt az, ha ezeket a csoportokat valamilyen rendszer szerint próbáljuk felsorolni. Az ilyen és hasonló problémákkal foglalkozó ágát a matematikának kombinatorikának nevezik. (Szokták néha magyar néven kapcsolástannak is nevezni.) A kombinatorika néhány egyszerű problémáját fogjuk az alábbiakban ismertetni.

Azokat a tárgyakat, elemeket, amelyekből csoportokat képezünk, leggyakrabban a természetes számsor számával, vagy az abc betűivel, illetve indexekkel ellátott betűkkel jelöljük. Az elemek egy-egy csoportját füzetnek, vagy komplexionak nevezzük.

Célszerű az elemek közt megállapítani egy alapsorrendet. Az éppen említett elemeknél erre a természetes sorrend kínálkozik. Ebben az elrendezésben a később következő elemet magasabb rangúnak fogjuk nevezni minden előbb következő elemnél, pld. a 4 magasabbrangú, mint a 2, a „c”, mint az „a”, az a_3 , mint az a_2 stb. A csoportok, füzetek közt is megállapíthatunk ezután rangsort többféleképpen. Az egyik lehetőség a következő: az a magasabbrangú füzet, amelynél balról jobbfelé haladva előbb fordul elő magasabbrangú elem, pl. 213 magasabbrangú, mint 132, 231 magasabbrangú, mint 213. Legmagasabb rangú az a füzet, ahol alacsonyabb elem nem előz meg magasabb rangút, azaz, ha az elemek fordított sorrendben következnek egymás után pl. 321. Legalacsonyabb rangú az a füzet, melyben magasabb rangú elem nincsen alacsonyabb rangú elem előtt, azaz az elemek természetes sorrendben következnek, pl. 123.

Permutációk

Az első feladat, amit meg akarunk oldani, az, hogy adott elemeket hány különböző módon lehet sorba rakni, tehát úgy elrendezni, hogy a csoportok az összes elemeket magukban foglalják és legalább egy elem elhelyezésében különbözzenek egymástól. Ez az eljárás permutáció.

Valamely csoport összes permutációit úgy nyerhetjük, hogy felírjuk először az elemek legalacsonyabb rangú permutációját s azután jobbról bal felé haladva azt az első elemet keressük, melynek helyébe a jobbra lévőkből közvetlen magasabbat tehetünk. Az utóbbi elemet az előbbi helyére tesszük, a többit pedig – a balra lévőket változatlanul hagyva – természetes sorrendbe utána írjuk. Így minden lépésnél magasabb csoportot kapunk, mégpedig úgy, hogy a két

csoport közé már nem iktathatunk az előbbinél magasabb, de az újabb csoportnál alacsonyabb rangú csoportot. Ennek ismételt alkalmazásával véges számú lépésben eljutunk a legmagasabb rangú csoporthoz. Pl.:

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Amint látjuk ezen komplexiókban egymástól különböző elemek fordulnak elő, kereshetjük azonban olyan füzetek számát is, melyekben egyes elemek többször fordulnak elő pl. 1134. Képezzük ezen füzet összes permutációit.

1 1 3 4	1 3 4 1	3 1 1 4	4 1 1 3
1 1 4 3	1 4 1 3	3 1 4 1	4 1 3 1
1 3 1 4	1 4 3 1	3 4 1 1	4 3 1 1

Az előbbi – mivel a füzetek azonos elemeket nem tartalmaznak – ismétlés nélküli, az utóbbi ismétléses permutáció, vagy helyesebben permutáció azonos elemekkel.

Lássunk még egy-két példát.

Képezzük az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemeknek 326514 után a fentebb leírt felsorolásban következő 14 permutációját:

3 2 6 5 4 1	3 4 2 1 5 6
3 4 1 2 5 6	3 4 2 1 6 5
3 4 1 2 6 5	3 4 2 5 1 6
3 4 1 5 2 6	3 4 2 5 6 1
3 4 1 5 6 2	3 4 2 6 1 5
3 4 1 6 2 5	3 4 2 6 5 1
3 4 1 6 5 2	3 4 5 1 2 6

Alkossuk meg az a, a, a, b, b, c elemeknek $abacba$ után következő 5 permutációját:

$a b b a a c$
 $a b b a c a$
 $a b b c a a$
 $a b c a a b$
 $a b c a b a$

Adott elemekből készíthető *permutációk száma* az elemek természetétől nyilván nem függ, csak annyiban, hogy van-e az elemek közt azonos vagy sem. Foglalkozunk az utóbbi esettel, tehát mikor minden elem különböző. Ez esetben a permutációk száma már csak az elemek számától függ. Jelöljük P_1 -el az 1 elem permutációinak számát (nyilván $P_1 = 1$); P_2 -vel két elem permutációinak számát, általában P_n -nel n elem permutációinak számát. Két elem esetén, mivel a második elem állhat az első vagy második helyen, $P_2 = 2 = 2 \cdot 1$. A két elem mindegyik permutációjából 3 háromelemű permutációt képezhetünk, mivel a harmadik elem állhat az első, második vagy harmadik helyen, tehát $P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Minden háromelemű permutációból 4 négyeleműt csinálhatunk, úgy, hogy a negyedik elemet beiktatjuk negyedik, harmadik, második, vagy első elemként. Így P_3 számú háromelemű permutációból $P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ számú négyelemű permutációt kapunk. Könnyen látható, hogy eljárásunk megad minden permutációt és mindegyiket csak egyszer. Ugyanígy láthatjuk be, hogy $P_5 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ és általában $P_n = n(n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Különböző elemekből tehát annyi permutációs füzetet alkothatunk, amennyi az 1-től az elemszámig terjedő egészszámok szorzata. A természetes számsor 1-től n -ig terjedő tagjainak szorzatát az „ n szám faktoriálisának” nevezzük és $n!$ -sal jelöljük (Olvasd: „ n faktoriális”).

Ebből az is következik, hogy minden elem annyiszor áll az első, második . . . stb. helyen, ha az előtte álló elemek helyét már rögzítettük, ahányszor az utána álló elemek felcserélhetők. Tehát az 1, 2, . . . n elemet tartalmazó füzetben minden elem $(n-1)!$ -szor áll az első helyen; ha az első elemet rögzítettük, minden további elem $(n-2)!$ -szor áll a második helyen . . . stb.

Oldjuk meg most a következő kérdést: a 3241 füzet hányadik permutációja az elemek természetes sorának 1234-nek a füzetek bevezetőben leírt elrendezésében? A 3-as előtt először az 1-es állt az első helyen, még pedig $3!$ -szor, mert az 1 addig állt az első helyen, míg az utána következő elemeknek elértük azt a permutációját, melyben nem előz meg egy elem sem nála magasabb rangút. Ez a 3 elem legmagasabb rangú permutációja, előtte a többinek is mindnek elő kellett fordulnia. Hasonló okokból a 2 is $3!$ -szor állt az első helyen, tehát $2(3!)$ permutáció elkészítése után került a 3 az első helyre. Mikor a 3 az első helyre került, akkor utána az 1 állt és $2!$ számú permutációban volt az 1 a második helyen, mert ennyiféleképpen kellett az utána következő két elemet permutálni, míg csökkenő sorrendbe kerültek. Ezután 2

került a második helyre, a harmadikra 1. Ez $1!$ számú permutációiban állt ott, mert a maradó egy elemnek csak ennyi lehetséges sorrendje van. Ezután a harmadik helyre került a 4 és az 1 ezzel szükségképpen szintén a saját helyére került. A 3241 permutáció tehát ebben az elrendezésben a $2(3!) + 1(2!) + 1(1!) + 1 = 16$ -odik.

Gondolatmenetünket rövidebben így foglalhatjuk össze: az első helyen álló 3 megelőz két alacsonyabb rangú elemet. E két elemnek is kellett előbb az első helyen állnia egyenként $3!$ -szor, mert az utánuk következő elemek $3!$ füzetet alkotnak mindkét esetben. A második helyen álló 2 csak az 1-est előzi meg. Előbb tehát ez állt a másik helyen $2!$ -szor, mert az utána következő két elem $2!$ füzetet alkot. A 4-es az 1-est előzi meg a harmadik helyen, ez tehát előtte állt előbb $1!$ számú füzetben, majd az utolsó lépésben mindkét elem a végleges helyére került.

Általában, ha „ n ”-nel jelöljük az elemek számát és k_1 -gyel azt a számot, amely megmutatja, hogy az első helyen álló elem hány alacsonyabbrangú elemet előz meg, ugyanígy $k_2, k_3 \dots k_{n-1}$ -gyel a többi helyen álló elemek után következő alacsonyabb rangúak számát, akkor a permutáció sorszámára

$$N = k_1(n-1)! + k_2(n-2)! + \dots + k_{n-1} \cdot 1! + 1.$$

Pl. *k a r ó*-nak a *r ó k a* hányadik permutációja? A „róka” szóban az első, második, harmadik, negyedik helyen a kiindulási „karó” sorrendnek sora a harmadik, negyedik, első és második betűje áll, tehát az a kérdés, hogy az $1\ 2\ 3\ 4$ elemeknek hányadik permutációja a $3\ 4\ 1\ 2$. A 3-as megelőzi az 1-est és 2-est, a 4-es megelőzi az 1-est és a 2-est, az 1-es nem előz meg alacsonyabb rangú elemet, tehát $k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 0$; $N = 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 = 12 + 4 + 1 = 17$.

Fordítsuk most meg a kérdést, határozzuk meg pl. az $1\ 2\ 3\ 4$ elemek 19-ik permutációját. Az 1-es, 2-es és 3-as mindegyike $3!$ -szor állhat az első helyen összesen $3 \cdot 3! = 18$. A 19-ik permutáció tehát 4-gyel kezdődik s utána az elemek természetes sorrendben következnek, $4\ 1\ 2\ 3$.

Mi a *k á n t o r* szó betűinek 451-ik permutációja? A betűket rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6-tal jelöljük.

Minden elem $5! = 120$ -szor áll az első helyen. 451-et 120-szal osztva a hányados 3 marad 91. Tehát az első helyen a 4 áll.

A megmaradó 1, 2, 3, 5, 6 elemekből mindegyik $4! = 24$ -szer áll a második helyen.

$$\begin{array}{l} 91 : 24 = 3, \\ 19 \end{array}$$

tehát a második helyen a maradó számok negyediké, az 5 áll.

Az 1, 2, 3, 6, elemek mindegyike $3! = 6$ -szor áll a harmadik helyen.

$$\begin{array}{l} 19 : 6 = 3, \\ 1 \end{array}$$

tehát harmadik helyen a 6 áll.

A megmaradó 1, 2, 3 elemnek első permutációja 123. Tehát a 451-ik permutáció 456123, ami azt jelenti, hogy a *k á n t o r* szó betűinek 451-ik permutációja *t o r k á n*.

Ha az adott „ n ” számú elem között „ p ” számú egyenlő elem fordul elő, akkor az egymástól különböző permutációk száma kevesebb lesz $n!$ -nál. Hogy szemléletessé tegyük okoskodásunkat, képzeljünk adva „ n ” számú golyót, melyek közül „ p ” számú egyforma fehér színű, a többi pedig legyen mind különböző színű. Kérdés, hogy hány különböző sorrendben lehet a golyókat egymás mellé tenni? Ha minden golyó különböző színű lenne, akkor $n!$ számú permutációt nyernénk. A jelen esetben azonban a fehér golyók felcserélése nem ad új komplexiót, a füzetek száma tehát kevesebb lesz, mint $n!$, mondjuk x számú komplexiót nyerünk. Különböztessük meg egymástól egy pillanatra a fehér golyókat azzal, hogy az elsőre egy pontot, a másodikra két pontot s. i. t., a p -edikre p pontot teszünk. Ha most egy bizonyos komplexióban lévő megjelölt p számú fehér golyót egymással minden lehető módon felcserélünk, akkor ebből a komplexióból $p!$ új füzet keletkezik. Mivel az összes egymástól különböző komplexiók száma x , s mindegyikből $p!$ új füzet keletkezik, tehát az összes új füzetek száma $x \cdot p!$ lesz. A fehér golyók pontozás révén különbözőekké váltak, tehát $x \cdot p! = n!$, ahonnan $x = \frac{n!}{p!}$, vagy a szokásos

jelöléssel $P_n^p = \frac{n!}{p!}$.

Általában, ha az n elem között p_1 számú azonos (pl. fehér golyók), ezenkívül további p_2 számú azonos is van (pl. fekete golyók) és további p_3, p_4, \dots, p_r számú azonos elem ($p_1 + p_2 + \dots + p_r \leq n$) van, akkor az előbbi okoskodásnak megismétlésével nyertük az ezekből képezhető permutációk $P_n^{p_1, p_2, \dots, p_r}$ számára a

$$P_n^{p_1, p_2, \dots, p_r} = \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_r!}$$

képletet.

Pl. hányféleképpen képezhető különböző csoport négy fehér, három fekete és két sárga golyóból; $P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!3!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9 = 1260$.

Hány különböző 7 jegyű szám írható fel a 0, 0, 0, 3, 5, 7, 7, számjegyekkel?

Összesen $P_7^{2,3}$ csoport alkotható, de a 0-val kezdődő csoportok nem alkotnak 7 jegyű számot, ezért utóbbiak száma levonandó. Az adott 7 elem permutációi között annyi fog 0-val kezdődni, ahány permutációs csoport képezhető a 0, 0, 3, 5, 7, 7, elemekből, vagyis $P_6^{2,2}$. Tehát a keresett szám

$$\begin{aligned} P_7^{2,3} - P_6^{2,2} &= \frac{7!}{2!3!} - \frac{6!}{2!2!} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 5 \cdot 6(7 - 3) = 60 \cdot 4 = 240. \end{aligned}$$

Variációk

Ha adott n számú elemből úgy alkotunk csoportokat, hogy az egyes füzetekben csak egy bizonyos k számú elem forduljon elő, de ezek minden lehetséges kiválasztásban és sorrendben, akkor variációs füzeteket alkotunk, az n elem k -adosztályú variációit.

Pl. 1 2 3 elemeknek elsőosztályú variációi 1, 2, 3; másodosztályú variációi 12, 13, 21, 23, 31, 32; harmadosztályú variációi 123, 132, 213, 231, 312, 321, melyek nem mások, mint a három elem permutációi. Képezzük 1 2 3 4 elemek másod-, harmad- és negyedosztályú variációit. Az utóbbiak ismét nem egyebek, mint a 4 elem permutációi

12 21 31 41	123 213 312 412	1234 2134 3124 4123
13 23 32 42	124 214 314 413	1243 2143 3142 4132
14 24 34 43	132 231 321 421	1324 2314 3214 4213
	134 234 324 423	1342 2341 3241 4231
	142 241 341 431	1423 2413 3412 4312
	143 243 342 432	1432 2431 3421 4321

Ha a képzés menetét megfigyeljük, látjuk, hogy adott elemek bizonyos osztályú variációiból a közvetlen magasabb osztályúakat úgy képezhetjük, hogy az adott variációk mindegyikének végéhez a benne elő nem forduló összes többi elemeket hozzákapcsoljuk, tehát a 12-höz a 3-at és a 4-et, a 13-hoz a 2-t és a 4-et . . . stb.

Ismét világos, hogy így a magasabb osztályú variációk mindegyikét megkapjuk, ha az alacsonyabb osztályúak hiánytalanul fel voltak sorolva és mindegyiket csak egyszer.

Ennek alapján könnyű lesz a *variációk számát* is meghatározni. Jelöljük n elem k -ad osztályú variációinak számát V_n^k -val. Haladjunk lépésről lépésre. Nézzük meg, hogy n elemből hány első, másod- . . . k -ad osztályú variációs füzet képezhető. n elemből nyilván n számú elsőosztályú variációs füzet képezhető, azaz $V_n = n$. Az első osztályú variációkból úgy képezhetünk másodosztályú variációs füzetet, hogy azokhoz vagyis az n elem mindegyikéhez sorra hozzáírjuk a többi $(n - 1)$ elem egy-egy elemét, tehát n elemből a $n(n - 1)$ másodosztályú variációs füzetet nyerünk; azaz $V_n^2 = n(n - 1)$. Ha a V számú füzet mindegyikének végére írjuk sorra a benne elő nem forduló $(n - 2)$ elem egy-egy elemét, akkor megkapjuk a harmadosztályú variációkat. Számuk tehát $V_n^3 = n(n - 1)(n - 2)$. Ezt lépésként folytatva kapjuk, hogy negyedosztályú variációk száma (ha $k = 4$)

$$V_n^4 = (n - 3)V_n^3 = n(n - 1)(n - 2)(n - 3), \quad V_n^5 = (n - 4)V_n^4 = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)$$

és általában

$$V_n^k = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 2)(n - k + 1).$$

Speciálisan, ha elme gyünk az n -ed osztályú variációkig, akkor így azt nyerjük, hogy $V_n^n = n(n - 1)(n - 2) \dots [n - (n - 1)] = n(n - 1)(n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! = P_n$, ami várható is, hiszen n elem n -ed osztályú variációi azonosak az elemek permutációival, tehát azok számát kellett megkapnunk.

Bizonyításunk így is végezhető: A V_n^k számú k -ad osztályú variációs füzet mindegyikéhez hozzacsatolva a benne elő nem forduló $n - k$ számú elem $(n - k)!$ számú permutációs csoportját, akkor minden egyes variációs csoportból $(n - k)!$ számú új $-n$ különböző elemet tartalmazó $-$ füzetet kapunk, vagyis V_k^n számú csoportból $V_n^k(n - k)!$ csoportot. Ily módon azonban megkapjuk az n elem összes permutációit, mert hiszen *minden* n elemű permutációs csoport a fent adott módon keletkeztethető, és mindegyiket csak egyszer, tehát

$$\begin{aligned} V_k^n(n - k)! &= P_n, \\ V_n^k &= \frac{P_n}{(n - k)!} = \frac{n!}{(n - k)!} = \frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)(n - k)(n - k - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n - k)(n - k - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= n(n - 1) \dots (n - k + 1) \end{aligned}$$

Most már megoldhatjuk a bevezetésben felvetett problémát: Hány 5 színű zászló készíthető 10 különböző színből? Ott nyilván a 10 elemből alkotott 5-ösdosztályú variációk számáról van szó. Tehát $V_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

Egy másik példa: Hány 5-tel osztható, csupa különböző számjegyből álló, 4 jegyű szám van?

Itt nyilván a 10 számjegynek 4-edosztályú variációiról van szó. 5-tel azok a számok oszthatók, melyek 0, illetőleg 5-tel végződnek.

0-val annyi különböző jegyű 4-jegyű szám végződik, ahány 3-adosztályú csoport képezhető a többi 9 számjegyből, vagyis $V_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Az 5-tel végződők száma ugyanannyi, csak ki kell még vonni belőlük a 0-val kezdődő és 5-tel végződő számok számát, vagyis $V_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$ -ot.

Tehát a követelményeinknek megfelelő számok száma $2V_9^3 - V_8^2 = 1008 - 56 = 952$.

Hány számot kapunk akkor, ha nem tesszük fel, hogy a számjegyek mind különbözőek legyenek? A feladat nyilván hasonlít a variációk kérdéséhez. Az utolsó jegy ismét csak 0, vagy 5 lehet, az előtte lévő 3 jegy pedig a 0, 1, 2, ..., 9 jegyekből álló bármilyen 3 elemű csoport lehet, de most egy jegy előfordulhat többször is. A feladatot kicsit bonyolítja az, hogy az első jegy nem lehet 0, az utolsó pedig csak 0, vagy 5 lehet. Azonban így is igen könnyű megoldani. Az első helyre 9 különböző jegyet írhatunk. Minden első jegy mellé 10-féleképpen írhatjuk a másodikat, tehát az első két jegyet 9 · 10-féleképpen választhatjuk. Mindegyik ilyen kétjegyű számot 10-féleképpen folytathatjuk a harmadik jeggyel, végül a kapott 9 · 10 · 10 háromjegyű szám mindegyikének a végére írhatunk 0-t vagy 5-öt, tehát ez esetben a kérdéses számok száma $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$.

Azt a – variációhoz hasonló – feladatot, amelyet fentebb említettünk ismétléses variációnak szokás nevezni. A feladat tehát ismét az, hogy adott n elemből minden lehető módon ki kell választani k számút. Két füzet akkor is különböző, ha csak a kiválasztott elemek sorrendjében különbözik, de most egy füzetben többször is – akárhányszor is – előfordulhat ugyanaz az elem. Az n elem k -adosztályú ismétléses variációinak számát $V_n^{i,k}$ -val fogjuk jelölni. Ismétlés nélküli variációk nyilván nem lehetnek magasabb osztályúak, mint az elemek száma, ismétléses variációkat azonban képezhetünk akárhányszor osztályúakat.

Figyeljük meg azt is, hogy az ismétléses variációk egészen más természetű problémát jelentenek, mint az ismétléses permutációk. Az utóbbiaknak inkább a következő feladat volna a megfelelője: Adva van n elem, melyek közt p_1, p_2, \dots, p_r számú egymás közt egyenlő elemekből álló csoportok vannak. Kérdés ezekből hány k -adosztályú variációs füzetet lehet készíteni. Ez a feladat azonban már lényegesen bonyolultabb az itt tárgyaltaknál. Ezzel nem fogunk foglalkozni.

Térjünk vissza az ismétléses variációk kérdéseire, képezzük pl. az 1, 2, 3 elemek másodosztályú ismétléses variációit:

11 21 31
12 22 32
13 23 33

A közvetlen magasabb osztályúak ezekből így képezhetők:

111 121 131 211 221 231 311 321 331
112 122 132 212 222 232 312 322 333
113 123 133 213 223 233 313 323 333

Vagyis az adott variációk mindegyikéhez sorban valamennyi adott elemet hozzácsatoljuk:

Keressük az *ismétléses variációk számát*. n elemből n elsőosztályú füzetet képezhetünk, ha most az n füzet mindegyikét az összes elemekkel megtoldjuk, $n \cdot n = n^2$ számú másodosztályú ismétléses variációs füzetet nyerünk, és ismét megkapunk minden füzetet pontosan egyszer, azaz $V_n^{i,2} = n^2$. A harmadosztályú ismétléses variációs füzetek képzésénél az n^2 számú füzet mindegyikét az n elem mindegyikével összekapcsoljuk, tehát $n \cdot n^2 = n^3$ füzetet nyerünk. Ezt ismételve eljuthatunk akárhányszor osztályú variációkig és kapjuk általában, hogy

$$V_n^{i,k} = n^k$$

Lássunk ismét néhány példát.

Hány 4-jegyű szám alkotható a 0, 2, 4, 6, 8 számjegyekből? Nyilván az adott 5 elemből alkotható ismétléses 4-edosztályú variációkról van szó. Ezeknek száma $V_5^{i,4} = 5^4 = 625$.

Ez volna a megoldás, ha 4-jegyű telefonszámokról volna szó. Ha nem telefonszámokról beszélünk, akkor a 0-val kezdődő csoportok számát le kell vonni. Utóbbiak száma $V_5^{i,3} = 5^3 = 125$ (vagy más megfontolással: az összes csoportok számának ötödrésze $\frac{5^4}{5} = 5^3 = 125$). Tehát a szóbanforgó 4-jegyű számok száma $V_5^{i,4} - V_5^{i,3} = 625 - 125 = 500$.

Hányféleképpen tölthető ki egy Toto-szelvény?

A Toto-szelvény 2 oszlopból áll, mindegyik oszlopban 12 mérkőzés várt eredménye jelezhető az „1”, „2”, és „x” jelekkel. Egy kitöltött oszlop tehát nem egyéb, mint a fenti 3 jelnek egy 12-edosztályú ismétléses variációja. Tehát egy oszlop $V_3^{i,12} = 3^{12} = (3^6)^2 = 729^2 = 531\,441$ -féleképpen tölthető ki. Mivel az első oszlop minden variációja a második oszlop minden variációjával párosítható, a keresett szám $(V_3^{i,12})^2$ vagy ha úgy tetszik $V_3^{i,24} = 531\,441^2 = 282\,429\,536\,481$. (A gyakorlatban a második oszlop nem lehet azonos az első oszloppal, tehát a nyert szám $V_3^{i,12}$ -vel csökkentendő.)

Ha adott elemekből úgy alkotunk csoportokat, hogy a csoportok mindegyikében csak bizonyos meghatározott számú elem forduljon elő és az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor ezen csoportosítási eljárást kombinációnak nevezzük. Miután az elemek sorrendjét nem tekintjük, tehát pl. az 123, 132, 213, 231, 312, 321 füzetek azonosnak számítanak. Így rögzíthetjük, hogy az elemeket mindig természetes sorrendbe írjuk.

A másodosztályú kombinációkat pl. úgy képezzük, hogy minden elemet az összes nála magasabb rangúval összekapcsoljuk. Így, az 1, 2, 3, 4 elemekből kiválasztható összes párok 12, 13, 14, 23, 24, 34. A harmadosztályú kombinációkat úgy nyerjük, hogy az adott kombinációk mindegyikéhez sorra hozzávesszük a benne elő nem forduló magasabb elemeket, tehát 123, 124, 134, 234.

A kombinációk számát leggyorsabban úgy állapíthatjuk meg, ha figyelembe vesszük, hogy n elem k -ad osztályú variációi nem mások, mint n elem összes k -ad osztályú kombinációinak összes permutációi. Pl. 1, 2, 3, 4 elemek másodosztályú kombinációi, mint láttuk, 12, 13, 14, 23, 24, 34. Jelöljük ezeknek számát C_4^2 -vel. Az egyes füzetek permutálásával nyerjük a másodosztályú variációkat: 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43. Ezeknek számát jelöltük V_4^2 -vel. A másodosztályú kombinációs füzetek permutálásával minden egyes füzetből $2!$ új füzetet nyertünk s így a C_4^2 számú füzetből $2! \cdot C_4^2$ -t, ami viszont nem más, mint négy elem másodosztályú ismétlés nélküli variációinak száma. Tehát $2! \cdot C_4^2 = V_4^2$, ahonnan $C_4^2 = \frac{V_4^2}{2!}$. Ugyanilyen megfontolással látható bármilyen n -re és k -ra, hogy V_n^k megadja a C_n^k számú kombinációk összes permutációinak számát. Egy-egy kombináció k elemének permutálásával $k!$ új komplexiót nyerünk, így C_n^k számú füzet mindegyikének permutálásával $C_n^k \cdot k!$ új füzetet nyerünk, és ez annyi, mint ahány k -ad osztályú variáció képezhető n elemből. Tehát

$$C_n^k \cdot k! = V_n^k, \quad \text{vagyis} \quad C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$$

A C_n^k jelzés helyett az egyszerűbb $\binom{n}{k}$ (Olvasd „ n alatta k ” vagy „ n a k fölött”) szimbólumot szokás használni.

Tehát $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$. Figyeljük meg, hogy a számlálóban ugyanannyi tényező van, mint a nevezőben, mégpedig n -től kiindulva csökkenő sorrendben.

Oldjuk meg a következő példákat:

Ismeretes, hogy a számtani haladványban szereplő 5 mennyiség: a , d , n , a_n és s_n között két egymástól független összefüggést (egyenletet) állapítottunk meg, melyek alapján bármely 3 mennyiséget (a fenti 5 közül) megadva, a hiányzó kettő a két egyenletből kiszámítható. Hány ilyen alapeladat van a számtani haladvánnyal kapcsolatban? Annyi ilyen alapeladat van, ahányféleképpen a 2 kiszámítandó mennyiség kiválasztható a szereplő 5 mennyiség közül. Tehát

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Hányféleképpen választhatunk egy 24 tagú társaságból öttagú küldöttséget? Mivel itt az egyes csoportokon belül a sorrend mellékes, azért kombinációval van dolgunk. Tehát

$$C_{24}^5 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 4 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 42\,504.$$

féleképpen választhatunk. (Ha 5 különböző tisztségből álló tisztikar választásáról lett volna szó, akkor V_{24}^5 , lett volna a helyes felelet, ami $5! \cdot C_{24}^5 = 5\,100\,480$.)

Most már a bevezetésben felvetett kérdésünkre – hogy mi x^4 -nek együtthatója az $(x+1)^{10}$ kifejezésben, is válaszolhatunk és egyúttal az ott használt jelölésre is fény derült.

Az együttható a 10 elemből alkotott 4-edosztályú kombinációk száma

$$C_{10}^4 = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$$

A kombinációkkal kapcsolatban is vessük fel az ismétléses variációknak megfelelő kérdést: hány k -elemű csoport választható ki n elemből, ha az elemek sorrendje nem számít, de mindegyik elem előfordulhat akárhányszor? Ezt szokás ismétléses kombinációnak nevezni.

Képezzük az 1, 2, 3, 4 elemeknek sorra az elsőosztályú, másodosztályú és harmadosztályú ismétléses kombinációit. Az első osztályúak nyilván (ugyanúgy, mint ismétlés nélküli): 1, 2, 3, 4. A másodosztályú ismétlés kombinációkat úgy kapjuk, hogy minden egyes elemet először önmagával, azután sorra az összes nála magasabb rangú elemmel kapcsoljuk össze, tehát 11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44. A közvetlen magasabb osztályú csoportokat úgy kapjuk, hogy minden egyes csoporthoz hozzáírjuk a csoport utolsó elemét, azután sorra egyenként az összes elemeket, melyek az utolsó elemnél magasabb rangúak. Tehát az 1, 2, 3, 4 elemeknek harmadosztályú ismétléses kombinációi:

111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144
 222, 223, 224, 233, 234, 244
 333, 334, 344, 444.

Az ismétléses kombinációk számának meghatározása végett írjuk le az 1, 2, 3 elemeknek összes harmadosztályú ismétléses kombinációit:

111	123
112	124
113	125
122	134
123	135
133	145
222	234
223	235
233	245
333	345

Ezekből alkossunk újabb csoportokat úgy, hogy az első helyen álló elemek rangszámához 0-t, a második helyen álló elemek rangszámához 1-et és a harmadik helyen álló elemek rangszámához 2-t adunk. (Lásd a jobb oldalon álló füzeteket). Az így nyert új füzetekben alacsonyabb rangú elem nem állhat magasabb rangú elem után, sőt még a rangszámok ismétlődése sem fordulhat elő, mert ez azt jelentené, hogy a baloldali ismétléses kombinációkban alacsonyabb rangú elem állt magasabb rangú elem után, ami a feltétel szerint lehetetlen. Ezek szerint tehát a jobb oldali újabb füzetek nem egyebek, mint az 1, 2, 3, 4, 5 elemeknek ismétlés nélküli 3-ad osztályú kombinációi. Nyilvánvaló az is, hogy e kombinációk egymás között mind *különbözők*. Könnyű azt is belátni, hogy ilymódon megkaptuk az 1, 2, 3, 4, 5 elemeknek *összes* harmadosztályú ismétlés nélküli kombinációit, és – az előbbiek szerint – mindegyiket *csak egyszer*. Mert az utóbbiak *bármelyikében* az első helyen álló elem rangszámából 0-t, a második helyen álló elem rangszámából 1-et és a harmadik helyen álló elem rangszámából 2-t levonva, a nyert rangszámok sorrendjében csökkenés nem mutatkozhatik, legfeljebb csak ismétlődés, és így az 1, 2, 3 elemeknek egy ismétléses kombinációját kapjuk. Ebből következik, hogy a 3 elemből alkotott 3-ad osztályú ismétléses kombinációk száma, melyet $C_3^{i,3}$ -mal fogunk jelölni, ugyanakkora, mint az 5 elemből ismétlés nélkül alkotott kombinációk száma, vagyis

$$C_3^{i,3} = C_5^3.$$

Általában ugyanezzel a gondolatmenettel kimutatható, hogy ha az n elemből alkotott k -adosztályú ismétléses kombinációk *mindegyikében* az első helyen álló elemek rangszámát 0-val, a második helyen álló elemek rangszámát 1-gyel, a harmadik helyen álló elemek rangszámát 2-vel s. i. t. a k -adik helyen álló elemek rangszámát $k-1$ -gyel növeljük, akkor megkapjuk az 1, 2, ..., n , $n+1$, ..., $n+k-1$ elemeknek összes k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációit mégpedig mindegyiket csak egyszer,

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 2 & & k \\
 \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \dots & \underbrace{\quad} \\
 1 & 1 & \dots & 2 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 n & n & \dots & n
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccc}
 1 & 2 & \dots & k \\
 \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & \dots & \underbrace{\quad} \\
 1 & 2 & \dots & k+1 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 n & n-1 & \dots & n+k-1
 \end{array}$$

vagyis

$$\begin{aligned}
 C_n^{i,k} &= C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \\
 &= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)\cdot n}{1\cdot 2\dots(k-1)\cdot k}
 \end{aligned}$$

A $C_n^{i,k}$ képlethez eljuthatunk a következő (BEKE MANÓ-tól származó) úton is: az 1, 2, 3, 4, 5 elemeknek bármelyik 4-edosztályú ismétléses kombinációs csoportját megadhatjuk azáltal, hogy megadjuk a benne előforduló elemeket, továbbá megadjuk a II., III. és IV. helyszámokból azokat, amely helyeken ismétlés előfordul. Pl. az első csoport 1 1 1 1 megadható az 1 II III IV jellemző csoporttal, ami azt jelenti, hogy a második helyre olyan elem kerül, amelyik már előfordult, de ez csak az 1-es lehet. Ugyanígy a harmadik és negyedik helyen ismétlődő elem is csak 1-es lehet. Az 1 2 2 5 csoportot az 1 2 5 III, a 3 3 3 4 csoportot 3 4 II III, a 3 3 4 4 füzetet a 3 4 II IV jellemzi. Félreértésre nem vezethet ez a jelölés, miután megegyeztünk abban, hogy az elemeket mindig emelkedő rangsorban írjuk egymás után. Így az első esetben az 1 2-t kell egymásután írunk, majd a harmadik helyre egy más szereplő elemet. Ez nem lehet az 1, mert azt a megegyezés szerint a második helyre írtuk volna, tehát a második helyen álló 2-t kell megismételünk. Hasonlóan nem téveszthető össze a harmadik csoporttal jellemzett kombináció sem a második helyen állóval, mert

előbbiben először a 3-ast kell leírni, azt a II-nek megfelelően megismételni, majd új elemet, a 4-et leírni; ezután a negyedik helyen ismétlődő elem már csak a magasabb rangú, a 4-es lehet. Ha nincs a csoportban ismétlés, akkor a „jellemző”-je az eredeti csoporttal azonos. A jellemző csoport is mindig 4 elemből áll, mert ha a csoport 4 különböző elemből áll, akkor nincs ismétlődés és akkor a jellemző csoportban sem szerepel helyszám, ha pedig 4-nél kevesebb elem szerepel a 4-ed osztályú ismétléses kombinációs csoportban, akkor annyi ismétlődésnek kell előfordulnia, amennyivel kevesebb elem szerepel a 4-nél és mivel minden ismétlést egy római helyszám jelez, azért a jellemző csoportban szintén mindig 4 az elemek száma. Az is nyilvánvaló, hogy a jellemző csoportban, az értelmezés szerint nem ismétlődhetik egy elem sem. Így minden jellemző csoport nem egyéb, mint az 1, 2, 3, 4, 5, II, III, IV elemeknek egy ismétlés nélküli 4-ed osztályú kombinációja.

Fordítva: az 1, 2, 3, 4, 5, II, III, IV elemekből alkotott *bármely* 4-ed osztályú ismétlés nélküli kombinációnak megfelel az 1, 2, 3, 4, 5 elemeknek egy ismétléses kombinációja, ami nyilvánvaló abból, hogy csak 3 római számunk van és így minden jellemző csoportban szerepel legalább egy arab szám is. Ezek közül a legkisebbet írjuk az első helyre. A továbbiakra ezután a jellemző csoport már világos utasítást ad. Pl. 1, 3, II, IV-nek megfelel 1 1 3 3, 4 5 II III-nak megfelel 4 4 4 5, 1 3 4 5-nek 1 3 4 5, 2 3 5 IV-nek 2 3 5 5 felel meg.

Így kimondható, hogy

$$C_5^{i,k} = C_8^4 = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 2 \cdot 7 = 70$$

Általában az 1, 2, ..., n elemeknek bármely k -adosztályú ismétléses kombinációja jellemezhető az 1, 2, ..., n , II, III, ..., K elemeknek egy ismétlés nélküli k -adosztályú kombinációjával és fordítva, az utóbbi $n+k-1$ elemből alkotott bármely k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációnak az 1, 2, ..., n elemeknek egy k -adosztályú ismétléses kombinációja felel meg. A jellemző csoportot úgy készítjük el, hogy leírjuk a kombinációban szereplő különböző elemeket egymás után. Ezután római számmal jelezve felsoroljuk azokat a helyeket, amelyeken már előbb is szereplő elem áll. Megfordítva a jellemző csoporthoz úgy készítjük el az általa jellemzett ismétléses kombinációt, hogy növekvő rangsorban írjuk az elemeket egymás után, amíg egy római számmal jelzett helyhez nem érünk. Az ilyen helyre újra a megelőző helyen álló elemet írjuk. Ezen úton is azt nyertük, hogy

$$C_n^{i,k} = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2) \dots (n+1)n}{1 \cdot 2 \dots (k-1) \cdot k} = \frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{1 \cdot 2 \dots k}.$$

Figyeljük meg, hogy a számlálóban ismét ugyanannyi tényező van, mint a nevezőben, de most n -től kiindulva növekvő sorrendben.

Lássunk néhány példát:

4 dobókockával dobunk, melyeknek a 6 lapján a számok (vagy különböző számú pontok) vannak 1-től 6-ig. Hány különböző dobás tehető

- ha a kockák különböző színűek?
- ha a kockák egyszínűek?

a) Legyen a négy kocka fekete, piros, kék és zöld és dobás után állítsuk őket egymás mellé ebben a sorrendben. Ekkor a 3, 6, 1, 3 dobás nyilván különbözik a 6, 3, 3, 1 dobástól. Így az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemeknek 4-edosztályú ismétléses variációival van dolgunk.

$$V_6^{i,4} = 6^4 = 1296.$$

b) Ez esetben a 4 kockát nem tudjuk megkülönböztetni s így nincs különbség pl. a 6, 4, 3, 4 dobás és 4, 6, 3, 4 dobás közt. Most tehát a 6 elemnek 4-edosztályú ismétléses *kombinációiról* van szó. Számuk

$$C_6^{i,4} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

Tekintsük még a következő példát: Ismeretes az Apollonius-féle érintési feladat, melyben 3 adott kört érintő köröket kell megszerkeszteni. Speciális esetek állanak elő, ha az adott körök között a nulla sugarú kört, vagyis a pontot, és a végtelen sugarú kört: az egyenest is megengedjük. A speciális esetekkel együtt hány – ilyen értelemben általánosított – Apollonius-féle feladat van?

Nyilván annyi, ahány 3-adosztályú ismétléses kombináció képezhető a következő 3 elemből: pont (P), egyenes (e), kör (k):

$$C_3^{i,3} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Cikkünk tartalmát röviden a következőkben foglalhatjuk össze:

1. Megismerkedtünk a különböző szempontok szerint alkotott csoportok képzési szabályaival. E képzési eljárásoknak főelve, hogy képessé tesz bennünket arra, hogy az *összes* csoportokat kivétel nélkül megkapjuk és minden csoportot csak *egyetlenegyszer*. Ebből az is következik, hogy minden csoportnak meghatározott rangszáma (sorszáma) van.

2. A tárgyalt esetekben képzési szabály alapján meg tudtuk állapítani esetről-esetre az összes csoportok számát megadó képletet.

Ha megadjuk az egy csoportban szereplő elemek számát és az elemek sorrendjére is tekintettel vagyunk, vagyis két csoportot, melyek ugyanazokat az elemeket tartalmazzák, de más-más sorrendben, különbözőnek tekintünk, akkor *variációról* vagy (speciális esetben) *permutációról* beszélünk.

Az n elemnek (ismétlés nélküli) k -adosztályú ($k \leq n$) variációinak száma

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

(k számú tényező n -től kiindulva csökkenő sorrendben).

Ha $k = n$, akkor permutációról beszélünk.

$$V_n^n = P_n = n! = 1 \cdot 2 \dots (n-1) \cdot n.$$

Ha a permutálandó n elem között $p_1, p_2 \dots p_r$ -számú azonos elem van (hol $p_1 + p_2 + \dots + p_r \leq n$), akkor a csoportok száma

$$P_n^{p_1, p_2, \dots, p_r} = \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_r!}.$$

Az n elemből képezett ismétléses k -adosztályú variációk száma (hol k *tetszőleges* pozitív egészszám):

$$V_n^{i,k} = n^k.$$

Ha az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, vagyis két füzetet azonosnak tekintünk, ha ugyanazon elemektől állnak, akkor *kombinációról* van szó. (A füzetek egy normál alakja az elemek természetes sorrendje.)

Az n elemből alkotott k -adosztályú kombinációk száma ($k \leq n$):

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}$$

Az n elemből alkotott k -adosztályú ismétléses kombinációk száma:

$$\begin{aligned} C_n^{i,k} &= C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \\ &= \frac{(n+k-1)(n+k-2) \dots (n+1)n}{1 \cdot 2 \dots (k-1) \cdot k} = \frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{1 \cdot 2 \dots k} \end{aligned}$$

Rá kell még mutatnunk, hogy a variációk nem egyebek, mint permutált kombinációk. E tény felhasználásával vezettük le a C_n^k képletet, de a $C_n^{i,k}$ képlet levezetésére ez a tény nem alkalmas.