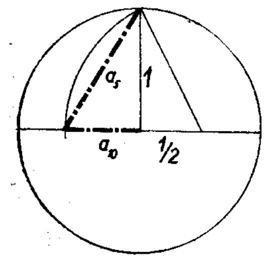
A II. gimn. matematikakönyv 146. oldalán utalás történik arra, hogy a szabályos tízszög szerkesztésében fellépő körív húrja éppen az ugyanebbe a körbe írható szabályos ötszög egy oldala (1. ábra). Ezt fogjuk igazolni a következőkben.




*1. ábra*

Bizonyításunkban egységsugarú kört használunk; ez nem megy az általánosság rovására, mert ha a kör sugara $r$ egység volna, a bele rajzolt „húrok” és egyéb ugyanolyan módon szerkesztett szakaszok is mind $r$-szeresükre növekednének (csökkennének) a hasonlóság folytán, ennélfogva arányuk változatlan marad.

Tudnunk kell, hogy az egységsugarú körbe rajzolható szabályos tízszög $a_{10}$ oldala eleget tesz az

$$1 = a_{10}(a_{10} + 1)$$

másodfokú egyenletnek. (L. a II. gimn. matematikakönyv 144. oldalán. Ott ilyen alakban fordul elő:

$$R^2 = a(a + R).$$

Ha $R = 1$, és $a$ helyett $a_{10}$-et írunk, akkor előbbi egyenletünkhöz jutunk.)

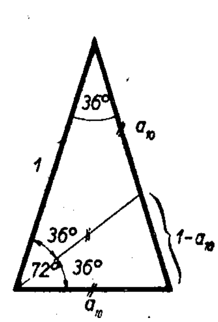
$a_{10}$ értéke ebből az egyenletből ki is számítható:

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

mert a negatív gyöknek, $-\frac{\sqrt{5}+1}{1}$-nek itt nem tudunk geometriai jelentést tulajdonítani.

A nem gimnazisták részére itt közöljük az $a_{10}$-re vonatkozó fenti egyenlet egy bizonyítását.

Tekintsük az egységsugarú körbe írt szabályos tízszög egyik középponti háromszögét (2. ábra).




*2. ábra*

A két vonalkával áthúzott szakaszok – a szereplő háromszögek egyenlő szárú volta miatt – mind egyenlők $a_{10}$-zel. Az eredeti és az alsó kis háromszög hasonlósága miatt (szögeik megegyeznek):

$$(1 - a_{10}) : a_{10} = a_{10} : 1,$$

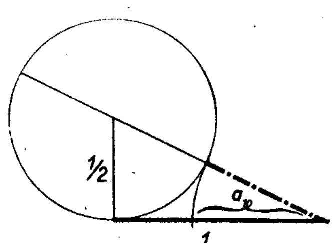
vagyis $a_{10}$ az aranymetszés szerint osztott egységnyi sugár nagyobbik darabja.

A beltagok szorzata egyenlő a kültagok szorzatával:

$$a_{10}^2 = 1 - a_{10}, \quad \text{amiből} \quad 1 = a_{10}(a_{10} + 1),$$

vagyis megkaptuk a fenti másodfokú egyenletet.

Az egységtávolság aranymetszés szerinti osztását a 3. ábra mutatja.




*3. ábra*

Az egységtávolság egyik végpontjában félegység sugarú érintőkört szerkesztünk az egységtávolsághoz. Ezen kör középpontján és az egységtávolság másik végpontján átmenő szelőn keletkező két metszet $a_{10}$ és $a_{10}+1$. Igazolás: Egy pontból húzott érintő (ábránkban az egységtávolság) mértani középarányos az ugyanabból a pontból húzott szelő két metszete között, vagyis

$$1 = a_{10}(a_{10}+1).$$

Látjuk, hogy $a_{10}$-et úgy kapjuk, hogy 1 és $^1/_2$ egységnyi befogókkal bíró derékszögű háromszög átfogójából kivonjuk a kisebbik befogót, az $^1/_2$-et. Ez történik az $a_{10}$-nek szokásos szerkesztésénél is. (L. 1. ábrát.)

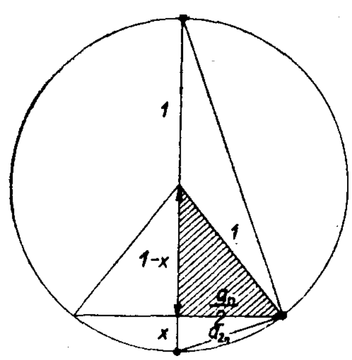
Visszatérve cikkünk tulajdonképpeni tárgyára, azt fogjuk bizonyítani, hogy az egységsugarú körbe szerkeszthető szabályos ötszög $a_5$ oldala és a szabályos tízszög $a_{10}$ oldala között az

$$a_5^2 = 1 + a_{10}^2$$

összefüggés áll fenn. Ez nyilvánvalóan ugyanaz, mint amit először állítottunk, mert hiszen a szabályos tízszög szerkesztésével kapcsolatban említett húr olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogói az egységnyi sugár és $a_{10}$, tehát ennek a húrnak a négyzete Pythagoras tétele értelmében $1+a_{10}^2$-tel egyenlő. Ha most sikerül kimutatnunk, hogy $a_5$ négyzete is ugyanennyi, akkor ezek, vagyis a szóbanforgó húr és $a_5$ maguk is egyenlők (hiszen mindketten pozitívok), ennélfogva a szóbanforgó húr csakugyan a szabályos ötszög egy oldala.

Állításunk igazolását kétféleképpen: elemi úton és trigonometriai ismeretek felhasználásával is végezzük, hogy alkalom kínálkozzék a különböző módszerek összehasonlítására.

*a)* Az elemi geometriai eljárás során először is összefüggést állapítunk meg ugyanabba az egységnyi sugarú körbe szerkeszthető szabályos (konvex) $n$-szög és $2n$-szög oldalának hosszúsága között. (4. ábra.).




*4. ábra*

A megvastagított csúcsú (Thales tétele szerint) derékszögű háromszögben mint az egyik befogó, mértani közepe az átfogónak (a kör átmérőjének) és az erre eső vetületének, amit $x$-szel jelöltünk. Eszerint:

$$a_{2n}^2 = 2x.$$

A bevonalkázott derékszögű háromszögre Pythagoras tételét alkalmazva:

$$(1-x)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 = 1,$$

ebből $1-x=\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4}}$, illetőleg $1-x=\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4}}$.
$x$ értékét $a_{2n}^2 = 2x$ egyenletünkbe írva:

$$a_{2n}^2 = 2\left(1-\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4}}\right) = 2-\sqrt{4-a_n^2}.$$

Speciálisan, ha $n = 5$:

$$a_{10}^2 = 2 - \sqrt{4 - a_5^2}$$

Ezt szeretnők a kívánt $a_5^2 = 1 + a_{10}^2$ alakra hozni. Felhasználjuk e célból, hogy $a_{10}$ eleget tesz a cikkünk elején említett

$$1 = a_{10}(a_{10} + 1)$$

egyenletnek. Ebből

$$a_{10}^2 = 1 - a_{10},$$

s ezt utolsó négyzetgyökös egyenletünkbe írva:

$$1 - a_{10} = 2 - \sqrt{4 - a_5^2}, \text{ azaz } \sqrt{4 - a_5^2} = 1 + a_{10}.$$

Távolítsuk el a négyzetgyököt:

$$4 - a_5^2 = 1 + 2a_{10} + a_1^2$$

Az itt még fölösleges $2a_{10}$ tagot ismét az

$$1 = a_{10}(a_{10} + 1) \text{ illetőleg } a_{10} = 1 - a_{10}^2$$

összefüggés alapján helyettesítjük megfelelővel:

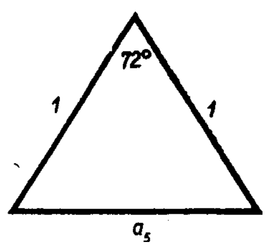
$$4 - a_5^2 = 1 + 2(1 - a_{10}^2) + a_{10}^2.$$

Ha utolsó egyenletünkben polinommá alakítunk, összevonás és rendezés után csakugyan a kívánt

$$a_5^2 = 1 + a_{10}^2$$

összefüggéshez jutunk.

*b)* A trigonometriai igazolásban az egységsugarú körbe írható szabályos ötszög egy középponti háromszögéből indulhatunk ki (5. ábra).

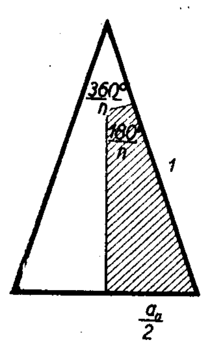



*5. ábra*

Írjuk fel erre a cosinus-tételt:

$$a_5^2 = 1 + 1 - 2\cos 72° = 1 + 1 - 2\sin 18°.$$

A szabályos $n$-szög egyik középponti háromszögét a csúcsnál lévő szög felezőjének meghúzásával két egybevágó derékszögű háromszögre osztjuk.




*6. ábra*

Ezek egyikéből (a 6. ábrán bevonalkáztuk) a szabályos $n$-szög oldala, $a_n$ a következő módon számítható ki (A körülírt kör sugarát most is egységnyinek vesszük.):

$$\frac{a_n}{2} = \sin\frac{180^\circ}{n},\ \text{azaz } a_n = 2\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Speciálisan, ha $n = 10$:

$$a_{10} = 2\sin 18^\circ,$$

fentebbi egyenletünk ennélfogva így alakul:

$$a_5^2 = 1 + 1 - a_{10}.$$

De már láttuk (az elemi megoldás során), hogy

$$1 - a_{10} = a_{10}^2,$$

vagyis csakugyan

$$a_2^5 = 1 + a_{10}^2.$$

Említettük, hogy $a_{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, ennek és utolsó egyenletünknek alapján most már $a_5$ értéke is kiszámítható.