Részlet A. A. Budancev tanárnak a Matyematyika v skole 1951. évi 2. számában megjelent cikkéből. – Oroszból fordítottal: Varga Tamás

Cikkünk célja: röviden összefoglalni azokat a tapasztalatainkat, amelyeket a betűkifejezések azonos átalakításának, továbbá a betűegyütthatós (paraméteres) egyenletek tanítása körül szereztünk.[1]

Az azonos átalakításoknak, egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásának olyan módjáról lesz szó, amikor *nem hagyjuk figyelmen kívül* azt, hogy a betűk milyen számokat jelenthetnek, az azonos átalakításokat, egyenletek és egyenlőtlenségek megoldását tehát *a betűk megengedett értékeitől függően* végezzük.

Az egyenletek, egyenlőtlenségek és azonos átalakítások ilyen módon való tanítását *függvénytani tárgyalásnak* fogjuk nevezni. Ezzel lényegébe véve matematikai nyelven fejeztük ki azt, hogy bizonyos anyag tanításában a materialista módszert alkalmazzuk. Az ilyen módon való tárgyalásnak alapvető jelentősége van a tanításban. Ennek ellenére a függvénytani tárgyalás még távolról sem hatotta át eléggé a középiskolai matematikatanítást.

A függvénytani tárgyalás kiküszöböli azokat a hibákat, amelyek a középiskolában az egyenletek, egyenlőtlenségek és azonos átalakítások tanítása során hosszú éveken át ismétlődnek. Ezenkívül még egy más szempontból is igen nagy jelentősége van ennek a tárgyalási módnak: a tanulók dialektikus gondolkozásra nevelése szempontjából.

Amikor a matematikatanárok az algebra és a trigonometria tanításában előtérbe állítják a függvény fogalmat, tisztában vannak azzal, milyen nagy szerepe van ennek az ifjúság marxista világnézetének kialakítása szempontjából.

Célunk röviden összefoglalni azokat a tapasztalatainkat, amelyeket az egyenletek, egyenlőtlenségek és azonos átalakítások tanítása során szereztünk, olyan körülmények között, amikor ezt az anyagot a használatban levő tankönyvek és feladatgyűjtemények még nem függvénytani szempontból tárgyalták.[2]

Megemlítjük forrásainkat – néhány olyan cikket és könyvet, amelyek a tanulmányozott kérdéskörben már érvényesítik a függvénytani tárgyalás szempontjait:

1. A »Matyematyika v skole« folyóirat 1936. évi második szánta megvizsgálja, milyen hibákat követtek el az algebrai feladatgyűjtemények szerzői a gyökös kifejezések azonos átalakításai terén abból kifolyólag, hogy nem érvényesítették a függvénytani tárgyalás szempontjait.
2. P. Sz. Alekszandrov és A. N. Kolmogorov: Az algebra tankönyve a VI–VII. osztály számára, 1939. évi kiadás. Ez a könyv a paraméteres egyenletek megoldásában alkalmazza a függvénytani tárgyalást.
3. A következő szerzők által összeállított feladatgyűjtemények: Krecsmar, Ober és Papelje, Barszukov (tanítóképzők számára), Polozova, Pogorelov.
4. A »Matyematyika v skole« 1946. évi 2. számában G. L. Nyevjazsszkij és Sz. I. Novoszjolov cikke: »Egyenletek diszkussziója«.
5. Sz. I. Novoszjolov: Algebra. Tankönyv pedagógiai főiskolák számára. Ez a könyv különösen világosan fejti ki az irracionális kifejezések azonos átalakításainak függvénytani tárgyalását.

A felsorolt forrásmunkák tanulmányozása mellett Cskalov város matematikai tanárai hosszú szemináriumokat tartottak az azonos átalakítások, egyenletek és egyenlőtlenségek kérdéseiről. Ezeket a szemináriumokat a tanári továbbképző intézet matematikai munkaközössége rendezte.

Megemlítjük, hogy ezeken a szemináriumokon az azonos átalakítások végzése és egyenletek megoldása során felmerülő hibákat mint módszertani hibákat vizsgáltuk. A használatban levő tankönyveknek azt a törekvését, hogy két kifejezés azonosságát az „igen–nem” séma alapján intézzék el, annak számbavétele nélkül, hogy a kifejezésekben szereplő betűknek mi az értelmezési tartománya, metafizikus törekvésnek ítéltük.

Például erről a két kifejezésről:

$$a \quad \text{és} \quad \sqrt{a^2}$$

(a négyzetgyökjel számtani gyököt, azaz pozitív értékű gyökűt jelent) nem mondhatjuk sem azt, hogy azonosak, sem azt, hogy nem azonosak, anélkül, hogy ne utalnánk a kifejezések értelmezési tartományára.

Ha az azonos átalakításokat nem ilyen módon tárgyaljuk, akkor napirenden lesznek az ilyenféle durva hibák:

$$\sqrt{(1-a)^2} + \sqrt{(a-5)^2} = -4.$$

Ilyen „azonos átalakításokkal” gyakran találkozunk az iskolában. Pedig ha az azonos átalakításokat függvénytani szempontból tárgyaljuk, vagyis nem hagyjuk figyelmen kívül a kifejezésekben szereplő betűk számértékeit, hanem a kifejezéseket a bennük szereplő betűk függvényének tekintjük, akkor az átalakítások helyes tanításának kérdése magától megoldódik.

---

[1] Cikkünk Cskalov város következő matematikatanárainak tanítási tapasztalataira támaszkodik:
2. számú iskola: A. H. Ioffe tanár (VIII.–X. osztály) és A. F. Szamoljev tanár (VII.–IX. osztály).
8. számú iskola: A. F. Velihova tanárnő, érdemes pedagógus (VIII.–X. osztály).
12. számú iskola: K. V. Krivolenko tanár (VII. osztály), Sz. T. Szmelov tanár (VIII.–X. osztály).
24. számú iskola: M. A. Roszljakova tanárnő.
30. száma iskola: A. N. Kurbatova tanárnő (VII. osztály).
33. számú iskola: A. M. Jegorov tanár (VII. osztály), Je. A. Vetrov tanár (VIII.–X. osztály) és T. I Nyikolajev tanár.

[2] Laricsev algebrai feladatgyűjteménye ebben az időben még nem volt bevezetve a középiskolákban. (Ford.)

Most összefoglaljuk azokat a tapasztalatainkat, amelyeket az algebra és trigonometria[1] említett fejezeteinek tanítása közben szereztünk.

Azonos átalakítások.

Az irracionális kifejezések azonos átalakításának elméletét a munkaközösségünkbe tartozó tanárok lényegében úgy tanítják, ahogy ezt a tárgykört Sz. I. Novoszjolov Algebrája feldolgozza. Tapasztalataink azt mutatják, hogy ez a feldolgozásmód teljesen megfelelő a VII. és IX. osztályos képességeinek.

A gyökös kifejezések tanításának kezdetén először is tisztázzuk a gyök vegyértékűségének kérdését: a páros kitevőjű gyökvonás csak nem negatív számokra van értelmezve, ($a < O$ esetén a $\sqrt[2n]{a}$ alakú kifejezéseknek a VIII. osztályos tanulók számára nincs értelmük), és a gyökjel mindig a gyök pozitív értékét jelöli: a páratlan kitevőjű gyökvonás szintén egyértékű, a gyökjel csak a gyök valós értékét jelöli.

Alább bemutatjuk néhány példa megoldását, lényegében ugyanúgy, ahogy azt a tanulók végezni szokták.

I. Gyökvonás.

$$\sqrt{(3-a)^2(a-1)^6} = \begin{cases} (3-a)(1-a)^3, & \text{ha } a \leqq 1 \text{ és } a \leqq 3 \\ (3-a)(1-a)^3, & \text{ha } 1 \leqq a \leqq 3. \end{cases}$$

Ahhoz hogy a gyökvonást és a gyökös kifejezések átalakítását függvénytani szempontból tárgyalhassuk, tanáraink véleménye szerint szükséges, hogy már a VII. osztályban megtanítsuk az elsőfokú egyenlőtlenségek megoldását. A magasabb fokú egyenlőtlenségekre, valamint a törtes egyenlőtlenségekre is a VIII. osztályban van szükség. Ezeket olyankor alkalmazzuk, amikor meg kell állapítanunk, hogy egy algebrai egész, vagy tört kifejezés milyen esetben pozitív és milyen esetben negatív. Tanáraink véleménye szerint a VIII. osztályosok már jól boldogulnak a legegyszerűbb magasabb fokú egyenlőtlenségekkel. Egyébként is, csak nyerünk azzal, ha bevezetjük a VIII. osztályba az egyenlőtlenségek tanítását, mert sok kérdést értelmesebben és alaposabban meg tudunk tanítani, azonkívül számos példa megoldását érdekesebbé tehetjük azzal, hogy az addig mechanikusan végzett átalakításokat a diszkusszió szempontjainak figyelembevételével végezzük.

A fent említett példában – és ugyanúgy más hasonló példákban is – a tanulók $(3-a)(1-a)^3$ előjelét egyszerűen úgy állapították meg, hogy meggondolták, milyen előjelet vesznek fel a kifejezések egyes tényezői a különböző értékei mellett.

II. Kiemelés gyökjel alól, bevitel gyökjel alá.

1. $\sqrt[4]{a^6} = \begin{cases} a\sqrt[4]{a^2} = a\sqrt{a}, & \text{ha } a \geqq 0, \\ -a\sqrt[4]{a^2} = -a\sqrt{-a}, & \text{ha } a \leqq 0. \end{cases}$

2. $a\sqrt[4]{b} = \left.\begin{cases} \sqrt[4]{a^4 b}, & \text{ha } a \geqq 0 \\ -\sqrt[4]{a^4 b}, & \text{ha } a \leqq 0 \end{cases}\right\}$ és $b \geqq 0$.

(Egyben egyszerűsítettük a gyökkitevőt és a gyök alatti kifejezés kitevőjét.)

Műveletek gyökös kifejezésekkel.

1.

$$2a\sqrt{a^2 b} - b\sqrt{a^6 b} + 3a^3\sqrt{b^3} = 2a|a|\sqrt{b} - |a^3|b\sqrt{b} + 3a^3 b\sqrt{b} =$$
$$= \left.\begin{cases} (2a^2 + 2a^3 b)\sqrt{b}, & \text{ha } a \geqq 0 \\ (4a^3 b - 2a^2)\sqrt{b}, & \text{ha } a \leqq 0 \end{cases}\right\} \quad \text{és } b \geqq 0$$

A tanulók ebben a példában, éppúgy, mint az alább következőkben, a művelet elvégzése előtt megállapítják, hogy a kifejezések a betűk milyen értékeire vannak értelmezve. A fenti példában a betűk megengedett értékei:

$b \geqq 0$

a bármilyen valós szám.

2.

$$\sqrt[3]{5-a} \cdot \sqrt{a-1} =$$
$$= \begin{cases} \sqrt[6]{(5-a)^2(a-1)^3}, & \text{ha } 1 \leqq a \leqq 5 \\ -\sqrt[3]{a-5} \cdot \sqrt{a-1} = -\sqrt[6]{(5-a)^2(a-1)^3}, & \text{ha } \quad a \leqq 5. \end{cases}$$

[1] Amikor a szerző egyenletekről és azonos átalakításokról beszél, természetesen nem csupán algebrai, hanem exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenletekre stb. is gondol. Az előbbiek a középiskolai tananyagban az algebra keretébe tartoznak, a trigonometria viszont a Szovjetunióban külön tárgy, ezért említi a szerző ezt külön. (Ford.)

A tanulók az ilyen példák megoldása közben egyrészt megszokják, hogy függvénytanilag gondolkozzanak, vagyis az átalakítások közben tekintetbe vegyék a betűk lehetséges számértékeit. Másrészt arra is ráneveli őket az ilyen példák megoldása, hogy munkájukban mindig kellő elővigyázattal járjanak el. Ritkán fordulnak elő náluk ilyenféle hibák:

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2};$$

általában így végzik el a műveletet:

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} = -\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}} = -\sqrt[3]{2}$$

3.

$$\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha} = \sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right), & \text{ha} \quad 2k\pi \leqq \frac{\alpha}{2} \leqq \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ \sqrt{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2}+2k\pi \leqq \frac{\alpha}{2} \leqq \pi+2k\pi, \\ -\sqrt{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right), & \text{ha} \quad \pi+2k\pi \leqq \frac{\alpha}{2} \leqq \frac{3\pi}{2}+2k\pi, \\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right), & \text{ha} \quad \frac{3\pi}{2}+2k\pi \leqq \frac{\pi}{2} \leqq 2\pi+2k\pi. \end{cases}$$

Trigonometria óráinkon azt tapasztaltuk, hogy az azonos átalakításoknak ez a módja nemcsak a függvénytani gondolkozásmódra tanít meg, hanem tudatossá teszi a szögfüggvények számos tulajdonságát is. Régen az ilyen példákat úgy oldották meg, hogy – nem törődve azzal, milyen értékeket vesz fel az α – levezettek a fenti négy formula közül *egyet.* Ez az eljárás egyrészt hibás, másrészt teljesen formális, mert nem veszi tekintetbe az itt szereplő függvények tulajdonságait. Az ilyen átalakítások nem egyebek mechanikus „ujjgyakorlatoknál”.

IV. *Arcus–függvényeket*[1] *tartalmazó azonosság igazolása.*

Igazoljuk a következő azonosságot:

$$2\ \text{arc}\ \cos\ a = \text{arc}\ \cos(2a^2-1)$$

(Ribkin, Trigonometriai példatár, 15. §, 23. feladat.)

Megállapítjuk, hogy a megengedett értékei:

$$-1 \leqq a \leqq 1.$$

Az azonosság igazolása céljából be kell látnunk a következőket:

1. Egy meghatározott szögfüggvénynek a

$$2\ \text{arc}\ \cos\ a, \qquad \text{illetve} \qquad \text{arc}\ \cos(2a^2-1)$$

ívekhez tartozó értékei egyenlők.

2. A

$$2\ \text{arc}\ \cos\ a \qquad \text{és} \qquad \text{arc}\ \cos(2a^2-1)$$

ívek az illető szögfüggvény ugyanazon monotonitási intervallumaiba esnek.[2] (Közbevetőleg megjegyezzük, hogy a második feltételről az ilyenféle példák megoldásakor sokan szeretnek elfelejtkezni, pedig ez hibás következtetésre vezethet az azonosság helyességét illetően.)

Ha a fenti példában a tanuló mindkét oldalnak a sinusát veszi, akkor ilyen gyökös kifejezésekhez jut:

$$\sin\left[\text{arc}\ \cos(2a^2-1)\right] = \sqrt{1-(2a^2-1)^2} = \sqrt{4a^2(1-a^2)} =$$

$$= \begin{cases} 2a\sqrt{1-a^2}, & \text{ha } 0 \leqq a \leqq 1 \\ -2a\sqrt{1-a^2}, & \text{ha } -1 \leqq a \leqq 0. \end{cases}$$

[1] Más szóval ciklometrikus függvényeket (szögfüggvények inverz függvényeit).

[2] Monotonitási intervallum egy olyan intervallum, amelyen belül a függvény monoton változik, azaz vagy csak nő, vagy csak csökken, amelyen belül tehát a függvény inverze egyértékű. Például a sinus–függvény monotonitási intervallumai a

$$.., \left[-(2k+1)\frac{\pi}{2}, -(2k-1)\frac{\pi}{2}\right], .., \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], .., \left[(2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right], ..,$$

intervallumok. Ha a 2. feltételt nem kötném ki, akkor előfordulhatna, hogy valamely helyen az eredeti egyenlőség nem teljesül, ennek ellenére az az egyenlőség, amelyet úgy kapok, hogy pl. mindkét oldalnak a cosinusát veszem, teljesül: vagyis a kapott egyenlőség teljesüléséből nem következtethetnék vissza az eredetire. Éppúgy, ahogy $-1 \neq 1$, és ennek ellenére $(-1)^2 = 1^2$. Ez pontosan azzal függ össze, hogy az x^2 függvénynek, amelyet itt mindkét oldalon alkalmaztam, -1 és 1 különböző monotonitási intervallumába esik. (Ford.)

Másrészt
$$\sin 2 \text{ arc } \cos a = 2a\sqrt{1-a^2}, \quad \text{ha} \quad -1 \leqq a \leqq 1.$$

Ha tehát a tanuló helyesen végzi az azonos átalakításokat, arra az eredményre kell jutnia, hogy a fenti azonosság nem áll fenn akkor, ha $-1 \leqq a < 0$, mert ebben az esetben a jobb- és baloldalon levő ívek sinusai különbözők. Ha még azt is megvizsgálja, milyen értékűek a $2 \text{ arc } \cos a$ és $\text{arc } \cos a(2a^2-1)$ ívek a $0 \leqq a \leqq 1$ esetben, arra a következtetésre jut, hogy ezek az ívek az egész $(0, 1)$ szakaszon egyenlők.

Megjegyzés. A példa megoldásához úgy fogtunk hozzá, ahogy az órán a tanulók. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy van ennél ésszerűbb megoldási mód is. Valóban, nem nehéz észrevenni, hogy a
$$2 \text{ arc } \cos a = \text{arc } \cos(2a^2-1)$$
egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha
$$0 \leqq 2 \text{ arc } \cos a \leqq \pi,$$
azaz
$$0 \leqq \text{ arc } \cos a \leqq \frac{\pi}{2},$$
vagyis ha
$$0 \leqq a \leqq 1.$$

Mivel pedig a
$$2 \text{ arc } \cos a \qquad \text{és} \qquad \text{arc } \cos(2a^2-1)$$
ívek egyaránt a $[0, \pi]$ intervallumban vannak, célszerűbb nem a sinusokat, hanem a cosinusokat venni; ha ugyanis két olyan ív cosinusáról, amelyek a cosinus–függvény egy monotonitási intervallumához tartoznak, tudjuk, hogy egyenlők, akkor ebből következik, hogy maguk az ívek is egyenlők (az adott esetben a feltétel az, hogy $0 \leqq a \leqq 1$.

Ennyi példa is elég annak megvilágítására, milyen hibák szoktak fellépni – sajnos még ma is elég gyakran – az ilyen jellegű azonos átalakításokban.

A logaritmust tartalmazó kifejezések azonos átalakításaiban is tekintetbe kell vennünk az argumentumok lehetséges értékeit. Pl.
$$\lg(x-2)(x-5) =$$
$$= \begin{cases} \lg(x-2) + \lg(x-5), & \text{ha } x > 5, \\ \lg(2-x) + \lg(5-x), & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

A
$$\lg(x-2)(x-5) = \lg|(x-2) + \lg|(x-5)|$$
egyenlőség mind az $x > 5$, mind az $x < 2$ esetben teljesül.

Egyenletek.

Az egyenletek és egyenlőtlenségek tanításakor nemcsak arra ügyeltünk, hogy a függvénytani tárgyalás szempontjait érvényesítsük, hanem arra is, hogy az egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek megoldásának minden egyes lépését az egyenértékűség elméletének alapján tegyük tudatossá. Ezzel elértük, hogy az egyenletmegoldás nem merült ki formális átalakítási lépések mechanikus alkalmazásában, hanem kitűnő lehetőségeket adott a logikai gondolkozás fejlesztésére.

Kiemeljük még, hogy az olyan fogalmakat, mint egyenlet, azonosság, megengedett érték, egy egyenlet gyökei, egyenlet megoldása, stb. sikerült ezen az úton haladva teljesen világossá tenni a tanulók előtt. Így például mindnyájan jól megértették, hogy egy egyenletnek a megengedett értékek halmazába tartozó minden olyan szám gyöke, amely az egyenletet azonossággá változtatja.

Numerikus (azaz nem betűegyütthatós, nem paraméteres) egyenletet megoldani annyit jelent: meghatározni az egyenlet összes gyökeit, vagy megállapítani, hogy az egyenletnek nincs gyöke. Paraméteres egyenletet megoldani annyit jelent: meghatározni, hogy a paraméterek minden megengedett értékrendszeréhez milyen gyökök tartoznak, és megállapítani, hogy milyen értékrendszerekhez nem tartoznak gyökök.

Amikor egy paraméteres egyenlet megoldása közben a paraméterek értékeire valami megszorítást tettünk, a tanulók tudták, hogy az eredeti egyenletet még azokra az értékekre is meg kell oldaniuk, amelyeket a megoldás folyamán kizártunk, feltéve, hogy ezek az eredeti egyenletre vonatkozólag a megengedett értékek halmazába tartoznak. (Ezt a tanulók úgy fejezték ki: „továbboldjuk az egyenletet a paraméterek többi megengedett értékeire”.)

Bemutatjuk egynéhány példán, hogyan oldottak meg tanítványaink paraméteres egyenleteket. Jól látható ezekből a példákból, milyen nagy képző ereje van az ilyen megoldási módnak mind a függvénytani gondolkodás fejlesztése, mind az egyenletek diszkutálásában való jártasság és a logikai készség fejlesztése szempontjából.

Az alábbi egyenlet–megoldásokat abban a formában közöljük, ahogyan a tanulók azokat kísérleti iskoláinkban végezték:

VII. osztály

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{a+x}{3} - 2 = \frac{x-3}{a}$$

A tanulók először megállapítják, hogy mik az ismeretlen és a paraméter megengedett értékei: x bármely racionális szám[1], $a \neq 0$.

Az egyenlet megoldását a következőképpen végezték:

1. $\dfrac{a+x}{3} - 2 = \dfrac{x-3}{a}, \quad a \neq 0$

2. $a^2 + ax - 6a = 3x - 9$ — 2. tulajdonság

3. $(a-3)x = -(a-3)^2$ — 1. tulajdonság

4. $x = 3 - a, \qquad$ ha $a \neq 3$. — 2. tulajdonság

Eredmény:

a) ha $a \neq 3, \quad x = 3 - a$;

b) ha $a = 3, \quad x$ bármilyen racionális szám.

Jobboldalt mindig feljegyezték a tanulók, hogy milyen tulajdonságok (tételek) alapján következtetnek arra, hogy a kapott egyenlet az eredetivel egyenértékű.

A *b)* esethez tartozó megoldást úgy kapták, hogy behelyettesítették az $a = 3$ értéket a 3. egyenletbe (természetesen nem a 4.-be!).

II. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

1. $\begin{cases} ax + y = 2a \\ a^2x - y = a^2 + 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} ax + y = 2a \\ (a + a^2)x = (a+1)^2 \end{cases}$ — 3. tulajdonság

3. $\begin{cases} ax + y = 2a \\ x = \dfrac{a+1}{a} \end{cases}$ — 1. tulajdonság

4. $\begin{cases} y = a - 1 \\ x = \dfrac{a+1}{a} \end{cases}$ — 1. és 2. tulajdonság

Eredmény:

ha $a(a+1) \neq 0$, azaz $a \neq 0$, és $a \neq -1$, akkor $\begin{cases} x = \dfrac{a+1}{a} \\ y = a - 1 \end{cases}$

5. Az $a = 0$ esetben egyenletrendszerünk így alakul:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + y = 0 \\ 0 \cdot x = 1 \end{cases}$$

Ennek a rendszernek nincs megoldása. (Rövid indokolás.)

6. Az $a = -1$ esetben ezt kapjuk:

$$\begin{cases} -x + y = -2 \\ 0 \cdot x = 0. \end{cases}$$

Ebben az esetben tehát az egyenletrendszerből egyetlen egyenlet marad: $x - y = 2$. (Rövid magyarázat, utalás arra, hogy az egyenletnek végtelen sok megoldása van. A tanulók már tudják, hogy vannak olyan kétismeretlenes egyenletek is, amelyeknek egyáltalán nincs, vagy legalábbis egy bizonyos számkörben nincs megoldásuk.)

[1] Azért csak racionális, mert a tanulók ebben az osztályban más számokat még nem ismernek. (Szerkesztőség.)

Az egyenletrendszerek tanításának ez a módszere azt eredményezi, hogy a VII. osztályos tanulók jobban megértik ezt az anyagot, mint azok a X. osztályos tanulók, akik a jelenleg használt Kiszeljov–féle tankönyv dogmatikus tárgyalásának szellemében tanulták ezeket a kérdéseket. Erről meggyőzően tanúskodnak a tanárképzős[1] felvételi vizsgák eredményei, ahol a jelölteknek ugyanezt az egyenletrendszert kellett megoldaniuk.

VIII. osztály

I. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2(\sqrt{a^2+x^2}+x)$$

A megengedett értékek:

$$a^2+x^2 \neq 0,$$

azaz x és a nem lehet mindkettő O.

Megoldás.

1. $\dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2(\sqrt{a^2+x^2}+x)$ $\qquad (a^2+x^2\neq 0)$,

2. $5a^2 = 2(a^2+x^2+x\sqrt{a^2+x^2})$ $\qquad$ 2. tulajdonság

3. $(3a^2-2x^2)-2x\sqrt{a^2+x^2}=0$ $\qquad$ 1. tulajdonság

4. $(3a^2-2x^2-2x\sqrt{a^2+x^2})(3a^2-2x^2+2x\sqrt{a^2+x^2})=0$

5. $9a^4-16a^2x^2=0$ $\qquad$ azonos átalakítás

6. $16x^2-9a^2=0,$ ha $a\neq 0$ $\qquad$ 2. tulajdonság.

7. $x=\pm\dfrac{3}{4}a.$

Eredmény:

a) ha $a>0$, $\quad x=\dfrac{3}{4}a$,

b) ha $a<0$, $\quad x=-\dfrac{3}{4}a$,

c) ha $a=0$, x bármely negatív szám.

Magyarázat. A tanulók tisztában vannak azzal, hogy a 4. és az utána következő egyenletekről nem tudhatjuk, egyenértékűek-e az eredetivel. A 3. egyenletből u. i. úgy kaptuk a 4.-et, hogy megszoroztuk az

$$f(x)=3a^2-2x^2+2x\sqrt{a^2+x^2}$$

függvénnyel, amely a megengedett értékek halmazán 0 értéket is felvehet, s akkor már a 2. tulajdonság feltétele nem teljesül. Másrészt azt is tudják a tanulók, hogy ez az átalakítás olyan egyenlethez vezet, amelyet az eredeti egyenlet minden gyöke kielégít (más szóval a második egyenlet az elsőnek következménye).

A 7. alatti *két egyenletről* megállapíthatjuk, hogy *együttesen* egyenértékűek a 6. egyenlettel Általában az

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)=0$$

egyenlet egyenértékű az

$$f_1(x)=0;\quad f_2(x)=0;\ldots;\ f_n(x)=0$$

egyenletek összességével.

A kapott gyökök gyökei tehát a 4. és utána következő egyenleteknek, de nem biztos hogy gyökei az 1. egyenletnek. A tanulók ellenőrizték a kapott gyököket, tekintetbe véve, hogy ezek a értékétől függenek. Az *a)* és *b)* megoldásnál külön kellett választani az $a=0$ és $a\neq 0$ eseteket. A próba azt mutatta, hogy az eredeti egyenlet gyökei a értékétől függően a következők:

[1]A középiskolai tanárokat képző Pedagogicseszkij Insztyitutokról van szó. (Ford.)

$$\left.\begin{array}{ll} a) \text{ ha } a > 0, & x = \frac{3}{4}\,a \\ b) \text{ ha } a < 0, & x = -\frac{3}{4}\,a \end{array}\right\} \quad \text{összefoglalva őket: ha } a \neq 0,\ x = \frac{3}{4}|a|,$$

c) ha $a = 0$, $x < 0$.

A 7. egyenlet többi számításba jövő gyökei, t. i.

$a < 0$ esetén $\quad x = \frac{3}{4}\,a$

$a > 0$ esetén $\quad x = -\frac{3}{4}\,a$

$a = 0$ esetén $\quad x > 0$,

„hamis gyökök”, mert csupán a

$$3a^2 - 2x^2 + 2x\sqrt{a^2 + x^2}$$

tényezőt változtatják 0-vá. Nyilvánvaló, hogy ezek a hamis gyökök akkor jöttek be, amikor megszoroztuk az egyenletet az

$$f(x) = 3a^2 - 2x^2 + 2x\sqrt{a^2 + x^2}$$

tényezővel.