I. megoldás. A kifejezést az x változó egyetlen trigonometrikus függvényének függvényévé alakítjuk. Ismert azonosságok alapján

$$y=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x+\frac{\sqrt{7}}{3}\sin 2x\right). \tag{1}$$

Szorozzuk és osszuk a változó részt az egyelőre ismeretlen c állandó számmal és határozzuk ezt úgy meg, hogy $\cos 2x$ és $\sin 2x$ szorzója egy φ pozitív vagy negatív hegyesszög színusza, ill. koszinusza legyen:

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2c}\left(\frac{\sqrt{7}c}{3}\sin 2x-c\cos 2x\right),$$

$$\frac{\sqrt{7}c}{3}=\cos\varphi,\qquad -c=\sin\varphi,$$

amiből

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{3}{\sqrt{7}},\qquad \varphi=-48^\circ\,36',$$

és így, a $\sin x$ függvény addíció tétele alapján

$$c=-\sin\varphi=-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{3}{4},$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin(2x+\varphi).$$

Ennek legnagyobb értéke

$$y_{\max}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6},$$

amikor

$$2x+\varphi=(4k+1)\cdot 90^\circ,$$

és k olyan egész szám, hogy

$$0^\circ\le x=(4k+1)\cdot 45^\circ-\frac{\varphi}{2}\le 360^\circ,$$

vagyis $k=0$ és $k=1$ esetén, amikor

$$x_{\max}=69^\circ\,18'\quad \text{és}\quad 249^\circ\,18'.$$

Legkisebb értéke pedig

$$y_{\min}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6},$$

ahol az előbbihez hasonlóan,

$$2x+\varphi=(4k+3)\cdot 90^\circ,$$

és $k=0$, 1 esetén x megfelelő értékei

$$x_{\min}=159^\circ\,18'\quad \text{és}\quad 339^\circ\,18'.$$

Pál Jenő (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A fenti c szorzó abszolút értékét meghatározhatjuk a $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=c^2\left(1+\frac{7}{9}\right)=\frac{16}{9}c^2=1$ összefüggésből is, előjele pedig egyezik $\cos\varphi$ előjelével, ezért $-90^\circ<\varphi<90^\circ$ alapján $c>0$.

2. Lényegében azonos a fentivel a következő alakítás, sokan jártak ezen az úton is:

$$y=\sin x\left(\sin x+\frac{\sqrt{7}}{3}\cos x\right)=\frac{4}{3}\sin x\sin(x+\varphi)=\frac{2}{3}\left[\cos\varphi-\cos(2x+\varphi)\right],$$

ahol $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{7}/3$, és így $\cos\varphi=3/4$.

II. megoldás. Az ismert

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2},\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}$$

azonosságokat x helyén $2x$-szel (1)-re alkalmazva

$$y=\frac{\operatorname{tg}^2 x+\left(\sqrt{7}/3\right)\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}; \tag{2}$$

ezzel y-t ismét egyetlen szög egyetlen trigonometrikus függvényének függvényeként állítottuk elő. A feladat első része lényegében (2) értékkészletét, ennek határait kérdezi, vagyis azoknak az y-oknak a halmazát, amelyekre (2)-nek van megoldása x-re. Az átrendezéssel adódó

$$(y-1)\operatorname{tg}^2 x - \frac{\sqrt{7}}{3}\operatorname{tg} x + y = 0 \tag{3}$$

egyenlet $\operatorname{tg} x$-re másodfokú, hacsak $y-1 \neq 0$, és ekkor diszkriminánsa

$$D = \frac{7}{9} - 4y(y-1) = -4\left(y+\frac{1}{6}\right)\left(y-\frac{7}{6}\right).$$

Ez akkor nem negatív, ha a változó tényezők kisebbike nem pozitív és nagyobbika nem negatív, azaz

$$y - \frac{7}{6} \le 0 \quad \text{és} \quad y + \frac{1}{6} \ge 0, \qquad \text{összefoglalva}$$

$$-\frac{1}{6} \le y \le \frac{7}{6}. \tag{4}$$

A kivételes $y = 1$ eset beleesik ebbe az intervallumba.

(3)-ból a $D = 0$ esetekben egyetlen megoldásként

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{7}}{6(y-1)}, \qquad \text{vagyis}$$

$$y = -\frac{1}{6} \quad \text{esetén} \quad \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{7}}{7} = -0{,}3780,$$

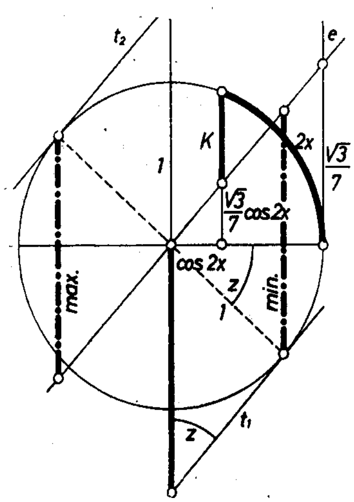
$$y = \frac{7}{6} \qquad \text{esetén} \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{7} = 2{,}646,$$

vagyis a (4)-beli határokat függvényének föl is veszi, éspedig az $y = 7/6$ maximumot az $x = 69^\circ\,18'$ és $249^\circ\,18'$, az $y = -1/6$ minimumot pedig az $x = 159^\circ\,18'$ és $339^\circ\,18'$ helyeken. *(Tolnai Jenő)*

III. megoldás. Írjuk a függvény (1) alakját a következőképpen:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{6}\left(\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{7}}\cos 2x\right). \tag{5}$$

A függvény nyilván ugyanott veszi fel legnagyobb és legkisebb értékét, ahol a második tag, az pedig ugyanott, ahol a zárójelben levő K különbség. Egyszerűség kedvéért ezt ábrázoljuk a következő módon. Az egységnyi kerületű körre a $2x$ ívet felmérve, $\sin 2x$-et a szokásos módon ábrázoljuk. Ebből a „vízszintes” egyenestől mérve $\dfrac{3}{\sqrt{7}}\cos 2x$ szakaszt metsz le a középponton átmenő iránytangensű e egyenes. Így K-t az az előjeles „függőleges” szakasz szemlélteti, amelynek végpontja a körre mért $2x$ ív végpontja, kezdő pontja pedig az e egyenesen van.



Meghúzva a kör e-vel párhuzamos t_1 és t_2 érintőjét, K nem nagyobb abszolút értékben, mint a t_1 és e (vagy t_2 és e) közti függőleges szakasz hossza, és éppen ekkora, pozitív, ill. negatív előjellel, ha a $2x$ ív végpontja az e-től pozitív irányban levő t_2, ill. a negatív irányban levő t_1 érintési pontja.

Az érintési pontokba húzott sugár és a vízszintes közti z szögre $\operatorname{tg} z = -\sqrt{7}/3 = -0{,}8819$. Az ábra a $0^\circ \le z < 360^\circ$, vagyis $0^\circ \le x < 180^\circ$ intervallumot öleli fel. Ebben a minimum $z = 2x = 318^\circ\, 36'$-nél, vagyis $x = 159^\circ\, 18'$ esetén adódik, a maximum helye pedig $z = 2x = 138^\circ\, 36'$-ből $x = 69^\circ\, 18'$. A t_2 és e függőlegesen mért távolsága

$$\left|\frac{1}{\sin z}\right| = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}{|\operatorname{tg} z|} = \frac{4}{\sqrt{7}},$$

ebből (5) alapján

$$y_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{6}\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{7}}\right) = -\frac{1}{6} \qquad \text{és}$$

$$y_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{6}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{7}{6}.$$