I. Olyan n kitevőt kell keresnünk, amelyre

$$(1)\qquad 1{,}968\cdot 10^m < 2^n < 1{,}969\cdot 10^m,$$

ahol $m \geqq 3$, természetes szám. Innen, mivel a lg x függvény szigorúan monoton növekvő,

$$m + \lg 1{,}968 < n\cdot \lg 2 < m + \lg 1{,}969,$$
$$(2)\qquad 0{,}293\,95 < n\cdot 0{,}301\,03 - m < 0{,}294\,25.$$

(Az alsó korlátot az iskolai új függvénytáblázat 0,2940 mantissza adatából képeztük, tudva, hogy kerekített, hasonlóan a felső korlátot 0,2942-ből; lg 2-nek 5 tizedesre kerekített értékét pedig a $\lg 1024 = \lg 2^{10} = 10\lg 2 = 3{,}0103$ adatából.)

A feladat állítása szerint $m > 2^k = 2^8 = 256$, emiatt

$$n\cdot 0{,}301\,03 > m > 256,$$
$$n > \frac{256}{0{,}30\,103} = 850{,}4,$$

azaz $n \geqq 851$. Mármost $n = 851$ esetén $n\cdot 0{,}301\,03 = 256{,}176\,53$, tehát 2^n logaritmusában a mantissza 0,176 53, kisebb a (2)-beli alsó korlátnál. A megoldást $n = 851$ közelében keresve, addig kell növelnünk n-et, amíg a mantissza eleget tesz (2)-nek. $n = 852$ esetén $0{,}176\,53 + 0{,}301\,03 = 0{,}477\,56$-ra növekszik, és ez már sok. A mantissza úgy csökken, hogy ha n-et 3-mal növeljük, hiszen így a hatvány logaritmusa

$$3\cdot 0{,}301\,03 = 0{,}903\,09 = 1 - 0{,}096\,91$$

értékkel növekszik, a mantissza 0,096 91-del csökken (ha ti. nagyobb volt ennél). Így 855-re növelve n-et, a mantissza 0,380 65, $n = 858$ esetén pedig 0,283 74, ami már majdnem megfelelő, de ismét kevés. Kis növelést érünk el n-nek 10-zel való növelésével, hiszen láttuk, hogy 2^{10} mantisszája 0,0103. Így (2)-nek eleget tevő mantisszát kapunk:

$$868\cdot 0{,}301\,03 - 261 = 0{,}294\,04.$$

II. Ez azonban még nem biztosítja, hogy az $n = 868$-as kitevő (1)-nek is eleget tesz. Valóban, (2)-ben a középső tag pontossága a 868-cal való szorzás során lényegesen romlik. Ellenőrzésül használhatunk hétjegyű logaritmustáblát, vagy 2^{868} elegendő számú kezdő jegyének kiszámításával ellenőrizhetjük eredményünket. Az utóbbi történhet pl. a következő lépésekben:

$$2^{13} = 8\cdot 1024 = 8192, \qquad 2^{14} = 2\cdot 2^{13} = 16\,384,$$
$$2^{27} = 2^{13}\cdot 2^{14} = 134\,217\,728,$$
$$180\,143\,96\ldots < 2^{54} = (2^{27})^2 < 180\,144\,00\ldots$$
$$324\,518\,46\ldots < 2^{108} = (2^{54})^2 < 324\,518\,61\ldots$$
$$105\,312\,23\ldots < 2^{216} = (2^{108})^2 < 105\,312\,33\ldots$$
$$210\,624\,46\ldots < 2^{217} = 2\cdot 2^{216} < 210\,624\,66\ldots$$
$$443\,626\,63\ldots < 2^{434} = (217)^2 < 443\,627\,48\ldots$$
$$196\,804\,58\ldots < 2^{868} = (2^{434})^2 < 196\,805\,35\ldots$$

A negyedik lépéstől kezdve 8 jegyre lefelé és fölfelé kerekítettük a szorzatokat. Ezek szerint az $n = 868$ kitevő eleget tesz (1)-nek.

Megjegyzések. 1. Ha nem használtuk volna fel a feladat $m > 256$ közlését, akkor eljárásunkat a 851, 852, … kitevők helyett az 1, 2, … sorozattal végezve beláthattuk volna, hogy az $n = 868$ kitevő az első, melyre 2^n első jegyei 1968…

2. Azt, hogy a (2) egyenlőtlenség a képezéséből eredő pontatlanságok ellenére jó eredményre vezetett, az a szerencsés körülmény magyarázza, hogy lg 2 értéke 7 tizedesre is az ott használt érték: 0, 301 0300 (10 jegyre pedig 0, 301 029 9957). Az ellenőrzést viszont nehezítette, hogy 2^{868}-ban az előírt 1, 9, 6, 8 jegyeket 0 követi.