I. A követelményt így is kimondhatjuk: (1) kifejtett alakjában nem léphetnek föl x-nek $n+1$-nél kisebb kitevőjű hatványai, vagyis együtthatójuk 0-val egyenlő, ide értve a 0 kitevőjű hatványt, az állandót is. Egyszerűbb, ha ezt (1)-nek (-1)-szeresére írjuk fel:

$$\begin{array}{ll} x^0 \text{ együtthatójából:} & a_0^2-1=0,\\ x \text{ együtthatójából:} & 2a_0a_1-1=0,\\ x^2 \text{ együtthatójából:} & 2a_0a_2+a_1^2=0,\\ x^3 \text{ együtthatójából:} & 2(a_0a_3+a_1a_2)=0,\\ x^4 \text{ együtthatójából:} & 2(a_0a_4+a_1a_3)+a_2^2=0. \end{array}$$

Nem lesz vagylagosság a kitevő páros vagy páratlan volta miatt, ha az utóbbi két egyenletet így írjuk:

$$\begin{array}{ll} x^3\text{-ből} & 2a_0a_3=-(a_1a_2+a_2a_1),\\ x^4\text{-ből} & 2a_0a_4=-(a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1), \end{array}$$

eszerint x^k $(2\le k\le n)$ együtthatójának eltűnéséből minden esetben

(2) $$2a_0a_k=-(a_1a_{k-1}+a_2a_{k-2}+\ldots+a_{k-2}a_2+a_{k-1}a_1).$$

Az első egyenletből $a_0=\pm1$. Minden egyes további egyenletben rendre egyetlen új együttható lép fel: a_1, a_2, …, így mindegyikük meghatározható abból az egyenletből, ahol először föllép, hiszen az egyenletben föllépő, kisebb indexű együtthatók már ismertek a föntebbi egyenletekből. Az első négy együttható, mindig figyelembe véve, hogy $a_0^2=1$:

(3) $$\begin{aligned} a_1&=\frac{1}{2a_0}=\frac{a_0}{2},\\ a_2&=\frac{a_1^2}{2a_0}=-\frac{1}{8a_0^3}=-\frac{1}{8a_0}=-\frac{a_0}{8},\\ a_3&=-\frac{a_1a_2}{a_0}=\frac{1}{16a_0}=\frac{a_0}{16},\\ a_4&=-\frac{a_2^2+2a_1a_3}{2a_0}=-\frac{5}{128a_0}=-\frac{5a_0}{128}. \end{aligned}$$

II. Zárt kifejezést adunk az a_k $(2\le k\le n)$ együtthatóra. Ehhez megjegyezzük, hogy a fentiekből az a_j/a_{j-1}, hányados értéke $j=2$, 3 és 4 esetére

(4) $$\frac{a_2}{a_1}=-\frac{1}{4};\qquad \frac{a_3}{a_2}=-\frac{1}{2}=-\frac{3}{6},\qquad \frac{a_4}{a_3}=-\frac{5}{8},$$

és mindháromnak közös alakja:

(5) $$\frac{a_j}{a_{j-1}}=-\frac{2j-3}{2j}.$$

Feltesszük, hogy ez fennáll minden $2\le j\le k-1$ indexre, és megmutatjuk, hogy ekkor fennáll $j=k$ esetére is. Tekintsük a következő összegeket:

$$\begin{aligned} S&=a_1a_{k-1}+2a_2a_{k-2}+3a_3a_{k-3}+\ldots+(k-2)a_{k-2}a_2+(k-1)a_{k-1}a_1,\\ S'&=(k-1)a_{k-1}a_1+(k-2)a_{k-2}a_2+(k-3)a_{k-3}a_3+\ldots+2a_2a_{k-2}+a_1a_{k-1}. \end{aligned}$$

Nyilvánvalóan $S'=S$, és így összegük, (2) figyelembevételével

(6) $$2S=k(a_1a_{k-1}+a_2a_{k-2}+\ldots+a_{k-2}a_2+a_{k-1}a_1)=-2ka_ka_0.$$

Alakítsuk másrészt a szorzatok első két tényezőjét az (5) feltevés

$$ja_j=-\frac{2j-3}{2}\,a_{j-1}$$

alakja alapján a következőképpen (kivéve természetesen, ha az első két tényezőben a_1 szerepel)

$$\begin{aligned} S&=a_1a_{k-1}-\frac{1}{2}[a_1a_{k-2}+3a_2a_{k-3}+5a_3a_{k-4}+\ldots+(2k-7)a_{k-3}a_2+(2k-5)a_{k-2}a_1],\\ S'&=-\frac{1}{2}[(2k-5)a_{k-2}a_1+(2k-7)a_{k-3}a_2+\ldots+3a_2a_{k-3}+a_1a_{k-2}]+a_1a_{k-1}. \end{aligned}$$

Ezekből, észrevéve, hogy a zárójelben annak a kifejezésnek a (-1)-szerese adódik, ami (2) jobb oldalán áll, ha k helyére $k-1$-et írunk; tehát értéke $-2a_0a_{k-1}$, másrészt $2a_1 = 1/a_0 = a_0$ figyelembevételével

$$\begin{aligned} S+S' = 2S &= 2a_1a_{k-1} - (k-2)[a_1a_{k-2} + a_2a_{k-3} + \ldots + a_{k-3}a_2 + a_{k-2}a_1] = \\ &= a_0a_{k-1} + 2(k-2)a_0a_{k-1} = (2k-3)a_0a_{k-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Végül (6) és (7) alapján, mivel $a_0 \neq 0$,

$$-2ka_ka_0 = (2k-3)a_0a_{k-1},$$
$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = -\frac{2k-3}{2k},$$

amit bizonyítani akartunk.

A (4) értékek és bizonyításunk alapján (5) fennáll $j=5$ esetére, és a teljes indukciós bizonyításmód alapján minden az n-nél nem nagyobb indexre.

Mármost (5)-öt alkalmazva egymás után a k, $k-1$, $k-2$, …, 2 indexekre (vagyis $k-1$-szer):

$$\frac{a_k}{a_1} = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{2k-3}{2k} \cdot \frac{2k-5}{2(k-1)} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2 \cdot 2},$$

továbbá a törtek szorzatát a nevezőjével bővítve, valamint a nevező tényezőinek 2-es tényezőit összegyűjtve, a faktoriális jelölésével, végül (3) figyelembevételével

$$\begin{aligned} a_k = a_1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{(2k-2)!}{[2^{k-1} \cdot (k-1)!]^2} &= a_0 \frac{(-1)^{k-1} \cdot (2k-2)!}{2^{2k-1}k \cdot [(k-1)!]^2} = \\ &= a_0 (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!} \cdot \frac{1}{2^{2k-1}}, \end{aligned}$$

vagy másképpen, a binomiális együttható jelölésével, többféleképpen is

$$\begin{aligned} a_k = a_0 \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} &= a_0 \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}(k-1)} \binom{2k-2}{k-2} = \\ &= a_0 \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1) \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-1}{k}. \end{aligned} \tag{8}$$

Lényegtelen, hogy a_0-nak melyik értékét vesszük, hiszen eredményünk szerint a_0 az (1)-beli második zárójelből kiemelhető és az $a_0^2 = 1$ tényező elhagyható.

Lempert László (Budapest, Radnóti M. Gyak G.) dolgozatából, egyszerűsítésekkel

Megjegyzések. 1. Akár (5), akár (8) eredményünk alapján könnyebben számíthatjuk ki a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} - \frac{5x^4}{2^7} + \frac{7x^5}{2^8} - \frac{21x^6}{2^{10}} + \frac{33x^7}{2^{11}} - \frac{429x^8}{2^{15}} + \frac{715x^9}{2^{16}} - \frac{2431x^{10}}{2^{18}} + \ldots$$

kifejezés egymás utáni együtthatóit, mint azt az 1109. gyakorlatban) [1] láttuk.

A talált együtthatókat beírva (1) ilyen alakú:

$$b_1x^{n+1} + b_2x^{n+2} + \ldots + b_nx^{2n} = x^{n+1}(b_1 + b_2x + \ldots + b_nx^{n-1}),$$

és ha x abszolút értékben közel áll 0-hoz, ez a kifejezés elhanyagolható, ezért

$$1 + x \approx (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)^2,$$
$$\sqrt{1+x} \approx a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n.$$

A közelítés hibájának megbecslése itt nem lehet célunk, csak megjegyezzük, hogy a hiba annál kisebb, minél kisebb abszolút értékű x-ről van szó (mindenesetre $|x| < 1$), másrészt hogy minél nagyobb n-ig megyünk el.

Lempert László

2. Számos dolgozat csak a fent közölt a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 együtthatókat számította ki, a többiek kiszámítását csak vázolta, ill. lehetőségként megemlítette. Ezek a versenyzők nem vették észre, hogy már az idézett 1109. gyakorlat kitűzésében szerepelt a_1 is, és ott a gyakorlat tárgya éppen két további együttható meghatározása volt.

[1] Lásd a megoldást K. M. L. 35 (1967) 151. o.

Az a_0, a_1, …, a_6 együtthatók szerepeltek a mondott (továbbá az 1029.) gyakorlathoz fűzött külön megjegyzésekben[2] is. Ez is elkerülte a figyelmet. A Szerkesztő Bizottság – abban az elgondolásban, hogy a feladatmegoldók emlékeznek az illető tárgykörben a közelmúltban megjelent megoldásokra és cikkre —, a (8), vagy hasonló explicit kifejezés megállapítását várta, ha élesen nem mondta is ki.

3. *Lempert László* megjegyezte, hogy $k \geq 4$ esetére az

$$a_k \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2^{2k-1} = C_k$$

számok adják meg a választ a következő kérdésre: hányféleképpen lehet felbontani egy konvex $k+1$-szöget egymást nem metsző átlószakaszok berajzolásával háromszögekre (vagyis úgy, hogy minden keletkező háromszög csúcsai a $k+1$-szög csúcsai közül valók legyenek). – Ezt az eredményt az 1187. feladathoz[3] fűzött 2. megjegyzés n-szögre

$$F_n = \frac{1}{n-2} \cdot \binom{2n-4}{n-3}$$

alakban mondta ki, a (2)-höz hasonló felépítésű

$$F_n = F_{n-1} + F_3 \cdot F_{n-2} + F_4 \cdot F_{n-3} + \ldots + F_{n-3} \cdot F_4 + F_{n-2} \cdot F_3 + F_{n-1}$$

kifejezés átalakítása alapján. (Maga az 1187. feladat csak a szabályos 7-szög felbontási lehetőségeinek számát kérdezte.)

[2] *Tusnády Gábor:* A négyzetgyökvonásról, K. M. L. 35 (1967) 97 – 99. o.
[3] K. M. L. 26 (1963) 126. o.