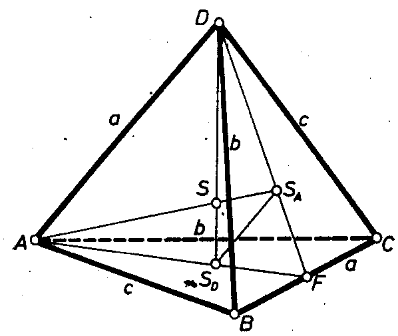
I. megoldás. A lapok egybevágóságából következik, hogy a tetraéder bármelyik két szemben levő – azaz közös csúccsal nem bíró – éle egyenlő hosszú. Ez nyilvánvaló akkor, ha az $ABCD$ tetraéder egy lapja egyenlő oldalú háromszög. Ha a $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ alapélek között van két különböző, pl. $b \neq c$, akkor a közös oldalú BCA és BCD háromszögek csak úgy lehetnek egybevágók, ha DB vagy AB-vel vagy AC-vel egyenlő (1. ábra).



1. ábra

Az első esetből továbbmenve $DC = AC$, így azonban az ADC háromszög nem lehet egybevágó az ADB háromszöggel, mert mindkettő egyenlő szárú, és a két szárhossz különböző. Ezért $DB = AC$, amint állítottuk.

A tetraéder súlypontján súlyvonalainak metszéspontját értjük, egy súlyvonalán pedig egyik csúcsát a szemben levő lapháromszög súlypontjával összekötő egyenest. Megmutatjuk, hogy a négy súlyvonal valóban egy pontban metszi egymást.

Legyen a BCA és BCD lapok súlypontja S_D, ill. S_A, és közös BC élük felezőpontja F. Ekkor az AS_A, DS_D súlyvonalak benne vannak az ADF síkban, hiszen S_A a DF (lapbeli) súlyvonalon, S_D pedig az AF súlyvonalon van, éspedig ezeknek F-hez közelebbi harmadoló pontja. Ezért az FS_DS_A háromszög 1:3 arányú kicsinyítettje az FAD háromszögnek F-ből mint középpontból, tehát $AD = 3 \cdot S_DS_A$, $S_DS_A \| AD$. Így az AS_DS_AD négyszög trapéz, átlóinak – a tetraéder kiszemelt súlyvonalainak – metszéspontját S-sel jelölve SS_AS_D és SAD hasonló háromszögek, és

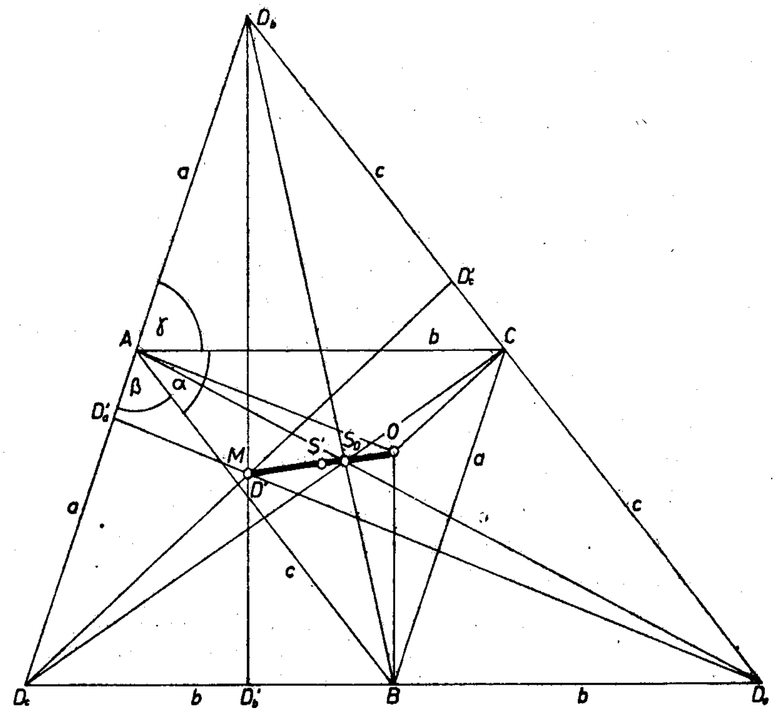
$$SS_A : SA = SS_D : SD = S_AS_D : AD = 1 : 3,$$

$S_AS = S_AA/4$, $S_DS = S_DD/4$. Eszerint bármely tetraéder bármelyik két súlyvonala úgy metszi egymást, hogy a metszéspont a súlyvonalnak a laphoz közelebbi negyedelő pontjában van, tehát az S_DD súlyvonalat a további két súlyvonal is ugyanott metszi. Ezt akartuk bizonyítani.

Esetünkben $AF = DF$, mert egybevágó háromszögek egymásnak megfelelő – ti. a közös BC oldalhoz tartozó – súlyvonalai, ezért az imént felhasznált trapéz szimmetrikus, és így $SA = SD$. Ugyanezzel a meggondolással az ACB, ACD háromszög-pár egybevágóságából $SB = SD$, és hasonlóan $SC = SD$, így az S körül SD sugárral írt gömb átmegy a tetraéder mindegyik csúcsán, tehát a feladat állítása igaz.

II. megoldás. Támaszkodunk az S súlypontnak az I. megoldásban bebizonyított tulajdonságaira.

Fordítsuk bele a D-ben összefutó DBC, DCA, DAB oldallapot rendre a BC, CA, AB alapél körül az ABC alaplap síkjába, éspedig úgy, hogy egyik se fedje az alaplapot; legyen D új helyzete rendre D_a, D_b, D_c (2. ábra).



2. ábra

Ekkor a D_bD_c egyenes átmegy A-n, mert az AD_b, AD_c félegyenesek közti szög egyenlő az ABC háromszög szögeinek összegével. Egyszersmind A felezi a D_bD_c szakaszt, így az $ABC = H_1$ háromszög a $D_aD_bD_c = H_2$ háromszög középháromszöge, így S_D súlypontjuk közös, és H_2 a H_1-ből úgy is előáll, ha azt az S_D pontra tükrözzük, majd a képét ugyancsak S_D-ből mint középpontból a kétszeresére nagyítjuk.

Az oldallapokat alapélük körül forgatva a BCD háromszög D csúcsa a D_a-ból BC-re bocsátott merőlegesnek D_aD_a' szakasza fölött halad, ahol D_a' a D_a pontnak a D_bD_c egyenesen levő vetülete. Ez H_2-nek magasságvonala, hiszen $D_bD_c \| BC$. Ugyanígy a visszaforgatás folyamán a D_bD_b', ill. D_cD_c' magasságszakasz fölött halad D, tehát csak e szakaszok közös pontja fölött lehet, és csak akkor jön létre, ha a magasságszakaszoknak van közös pontja, vagyis ha az ABC háromszög hegyesszögű. A közös pont a háromszög M magasságpontja. Hegyesszögű háromszögből kiindulva viszont D mindig létrejön.

Ebből kapjuk, hogy a tetraéder S súlypontjának a H_1 síkján levő S' vetülete negyedeli az $S_DD' = S_DM$ szakaszt, ennélfogva azt kell belátnunk, hogy S' a H_1 köré írt kör középpontja, hiszen S csak így lehet egyenlő távolságra H_1 csúcsaitól. Ehhez elég belátnunk, hogy S' a fenti két transzformáció útján áll elő a H_2 köré írt kör O középpontjából. Valóban, O, S_D és M a H_2-nek *Euler*-féle egyenesén a mondott sorrendben úgy feküsznek, hogy $OS_D = S_DM/2$, ezért a fentiek szerint S' is az egyenesen van, az OS_D szakasz S_D-n túli meghosszabbításán, és $S_DS' = S_DM/4 = S_DO/2$. Ezt akartuk bizonyítani, ebből $SA = SB = SC$.

Meggondolásunkat a tetraéder egy másik lapján megismételve adódik, hogy D-nek S-től való távolsága egyenlő az előbbi 3 távolsággal. Evvel az állítást bebizonyítottuk.

III. megoldás. A súlypont negyedelő tulajdonsága folytán elég belátnunk, hogy a tetraéder súlyvonalai egyenlő hosszúak. Ez az 1121. gyakorlatban[1] bebizonyított tételből adódik, ugyanis esetünkben

$$DS_D^2 = \frac{1}{3}(DA^2 + DB^2 + DC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

és ugyanez adódik mindegyik súlyvonalra.

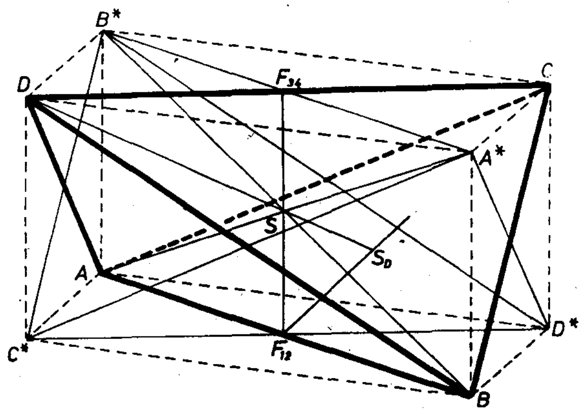
IV. megoldás. Legyenek a tetraéder csúcsainak helyvektorai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, ekkor – mint ismeretes – a tetraéder S súlypontjának helyvektora

$$\mathbf{s} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}\right].$$

Az utóbbi alakból kiolvasható, hogy S az AB szakasz $F_{1,2}$ és a CD szakasz $F_{3,4}$ felezőpontjai közti szakasznak is a felezőpontja. Eszerint bármely tetraéder súlypontja felezi a szemközti él-párjainak felezőpontjai közti szakaszokat.

Tükrözzük a $T = ABCD$ tetraédert S-re, kapjuk a $T^* = A^*B^*C^*D^*$ tetraédert. A fentiek alapján az A^*B^* szakasz felezőpontja azonos a CD szakasz felezőpontjával, tehát A^*CB^*D paralelogramma. Hasonlóan paralelogramma az A^*BC^*D, A^*BD^*C négyszög is, és ezek S-re vonatkozó AB^*CD^*, AB^*DC^* tükörképe is, valamint az AC^*BD^* négyszög. A felsorolt 6 lap egy P paralelepipedont határol, melynek S a középpontja (3. ábra).

[1] Lásd a megoldást K. M. L. 35 (1967) 216. o.



3. ábra

A feladat feltevése szerint T szemközti élei egyenlők, ezért P lapjain az átlók páronként egyenlők, P lapjai tehát téglalapok és P téglatest. Ámde a téglatest testátlói egyenlők, tehát S a P-nek mindegyik csúcsától, így T csúcsaitól is egyenlő távol van. Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. Megoldásunk alapján bármely T téglatestből származtatható egy a feltételeknek megfelelő tetraéder, ennek csúcsai: T-nek egy A csúcsa és a benne összefutó 3 lapnak A-val szemben levő csúcsa. – Ha T élei a, b, c, különbözők, akkor a tetraéder szemben fekvő élpárjai

$$\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \sqrt{b^2+c^2}, \qquad \sqrt{c^2+a^2},$$

szintén különbözők, és a belőlük alkotott háromszög hegyesszögű, mert pl. az első kettő közti ε szögre

$$\cos\varepsilon = b^2/\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} > 0.$$

V. megoldás. A 2. ábrán a tetraéder lapjaira belülről tekintünk rá. Ebből azt is látjuk, hogy a 4 lap megfelelő csúcsait ugyanabban a sorrendben körüljárva ugyanolyan forgási irányban járjuk körül a lapokat. Eszerint ugyanez áll akkor is, ha a lapokra kívülről nézünk. Így pedig a tetraédert bármelyik lapjánál fogva az eredeti helyére állíthatjuk, az illető lap csúcsait az alap megfelelő csúcsaihoz illesztve, és ekkor a 4. csúcs helyét az alap csúcsaitól mért 3 távolság egyértelműen meghatározza, tehát a 4. csúcs is illeszkedik az eredeti tetraéder alapjával szemközti csúcsához. Ebből ismét adódik, hogy a 4 súlyvonal egyenlő.

Megjegyzés. A mondottakból az is következik, hogy a szóban forgó tulajdonságú tetraéderek súlypontja a 4 laptól is egyenlő távolságra van, tehát a súlypont egyszersmind a beírt gömbnek is középpontja. Ezek szerint van olyan, nem szabályos háromszöglapokkal határolt tetraéder, melyben a látott 3 nevezetes pont egybeesik. (A síkban viszont a súlypont, a körülírt, valamint a beírt kör középpontjai közül bármelyik kettőnek az egybeeséséből következik, hogy a háromszög szabályos.)