

α) Az (1) táblázat $3 \leq n \leq 7$ indexű és a (2) táblázat $4 \leq n \leq 7$ indexű sorai kielégítik a (3)-ban leírt képezési szabályt. Legyenek az (1)-nek ilyen, vagy az így képezett folytatásnak $n-2$, $n-1$, és n indexű sorában az együttthatók:

$$\begin{array}{c|ccc} n-2 & 1 & c_1 & c_2 & \dots \\ n-1 & 1 & b_1 & b_2 & \dots \\ n & 1 & a_1 & a_2 & \dots \end{array}$$

vagyis, $C = 2 \cos x$ megfelelő hatványait is kiírva:

$$(4) \quad C_{n-2} = 2 \cos(n-2)x = C^{n-2} + c_1 C^{n-4} + c_2 C^{n-6} + \dots$$

$$(5) \quad C_{n-1} = 2 \cos(n-1)x = C^{n-1} + b_1 C^{n-3} + b_2 C^{n-5} + \dots$$

$$(6) \quad C_n = 2 \cos nx = C^n + a_1 C^{n-2} + a_2 C^{n-4} + \dots$$

Míntogy ezekre

$$(7) \quad a_1 = b_1 - 1, \quad a_2 = b_2 - c_1,$$

és általában $i = 2, 3, \dots$ esetén

$$(8) \quad a_i = b_i - c_{i-1},$$

másképp (4)–(6) szerint b_1 és b_i a C változó 1-gyel kisebb kitevőjű hatványának együttthatója, mint a_1 , ill. a_i és c_{i-1} , azért (7)-ből és (8)-ból a következő összefüggést sejtjük:

$$(9) \quad C_n = C \cdot C_{n-1} - C_{n-2}.$$

Ezt fogjuk bizonyítani.

Valóban, a

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

azonosság alapján

$$\begin{aligned} C_n + C_{n-2} &= 2 \cos nx + 2 \cos(n-2)x = 4 \cos(n-1)x \cos x = \\ &= (2 \cos x)(2 \cos(n-1)x) = C \cdot C_{n-1}, \end{aligned}$$

tehát sejtésünk helyes.

(9) alapján a C változó (6) alatti polinomja az (5) alatti polinom C -szeresének és a (4) alatti polinomnak a különbségével egyenlő:

$$C^n + a_1 C^{n-2} + a_2 C^{n-4} + \dots = C(C^{n-1} + b_1 C^{n-3} + b_2 C^{n-5} + \dots) - (C^{n-2} + c_1 C^{n-4} + c_2 C^{n-6} + \dots).$$

Ez akkor teljesül, ha C megfelelő hatványainak az együttthatói a két oldalon egyenlők:

$$\begin{array}{ll} C^n & \text{együttthatója a bal oldalon: } 1, \quad \text{a jobb oldalon: } 1; \\ C^{n-1} & \text{együttthatója a bal oldalon: } 0, \quad \text{a jobb oldalon: } 0; \\ C^{n-2} & \text{együttthatója a bal oldalon: } a_1, \quad \text{a jobb oldalon: } b_1 - 1; \\ & \dots \\ C^{n-2i} & \text{együttthatója a bal oldalon: } a_i, \quad \text{a jobb oldalon: } b_i - c_{i-1}; \\ C^{n-2i-1} & \text{együttthatója a bal oldalon: } 0, \quad \text{a jobb oldalon: } 0; \\ & \dots \end{array}$$

(9) tehát következik a (8) alatti képezési szabályból. Így ha (4) és (5) azonosság, és a bennük szereplő együttthatókból (8) alapján állítjuk elő a (6) alatti együttthatókat, akkor (6) is azonosság.

β) Az állítás szerint (7) és (8) akkor is érvényesek, ha (4)–(6) bal oldalára rendre S_{n-2} -t, S_{n-1} -t, S_n -t írjuk, és a $c_1, c_2, \dots, b_1, b_2, \dots, a_1, a_2, \dots$ együttthatókon a (2) táblázat $n-2$, $n-1$, ill. n indexű sorának együttthatóit értjük. Ezért a (9)-nek megfelelő

$$S_n = C \cdot S_{n-1} - S_{n-2}$$

összefüggést is igazolnunk kell. Valóban, az előbbihez hasonlóan

$$\begin{aligned} S_n + S_{n-2} &= \frac{\sin nx + \sin(n-2)x}{\sin x} = \frac{2 \sin(n-1)x \cos x}{\sin x} = \\ &= 2 \cos x \cdot \frac{\sin(n-1)x}{\sin x} = C \cdot S_{n-1}. \end{aligned}$$

γ) Már csak azt kell belátnunk, hogy a táblázatoknak (3) alapján nem képezhető elemei, vagyis az első két sor számai helyesek. Ezek ismert azonosságok alapján közvetlenül igazolhatók:

$$2 \cos 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2(2 \cos^2 x - 1) = (2 \cos x)^2 - 2 = C^2 - 2;$$

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = 2 \cos x = C;$$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{\sin x} = 3 - 4 \sin^2 x =$$

$$3 - 4(1 - \cos^2 x) = (2 \cos x)^2 - 1 = C^2 - 1.$$

Ezzel a feladat mindegyik állítását igazoltuk.

Nagy Zsigmond (Budapest, Kaffka M. Gimn.)

Megjegyzések. 1. A (2) táblázatot 4 sorral kiegészítve a következőket kapjuk: 1, -6, 10, -4; 1, -7, 15; -10, 1; 1, -8, 21, -20, 5; 1, -9, 28, -35, 15, -1, és a legutóbbi sor együtthatói megfelelnek az 1508. feladatban¹ látott $\sin 11\varphi = \sin \varphi(1024 \cos^{10} \varphi - 2304 \cos^8 \varphi + 1792 \cos^6 \varphi - 560 \cos^4 \varphi + 60 \cos^2 \varphi - 1)$ előállításnak.

2. Ajánljuk az érdeklődőknek a feladat egybevetését a Matematikai és Fizikai Társulat 1899. évi tanulóversenyének 1. feladatával².

¹K. M. L. 35 (1967) 130. o.

²Lásd: *Kürschák József-Hajós György-Neukomm Gyula-Surányi János: Matematikai versenytételek, I. rész, 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965, 46-51. o.*