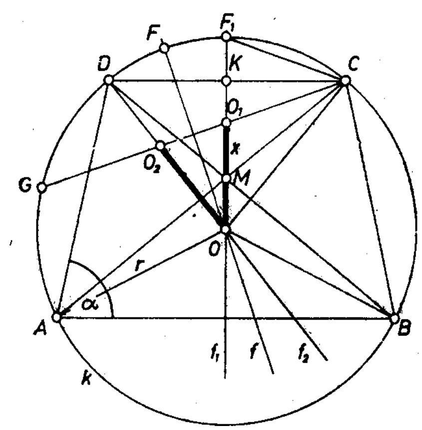
I. megoldás. *a)* A $CDM = H_1$ háromszög beírt körének O_1 középpontja rajta van H_1 és az $ABCD = T$ trapéz közös f_1 szimmetriatengelyén. f_1 átmegy a T köré írható k kör O középpontján is, továbbá az A pontot nem tartalmazó CD ívet annak F_1 felezőpontjában metszi (1. ábra).



1. ábra

Az $ACD = H_2$ egyenlő szárú háromszög szimmetrikus k-nak D-ből kiinduló f_2 átmérőjére, így f_2 átmegy a H_2-be beírt kör O_2 középpontján is.

f_1 és f_2 szimmetrikusak a rövidebb DF_1 ív F felezőpontján átmenő f átmérőre, hiszen f felezi az általuk bezárt szöget. Az F_1C ívet f-re tükrözve a DG ívet kapjuk, ahol a B-t nem tartalmazó DG és DA ívek egyirányúak, és DG egyenlő a DA ívvel egyenlő CD ív felével, G tehát felezi a DA ívet. Emiatt CG felezi a H_1 és H_2 háromszögek C csúcsnál levő közös szögét, és így átmegy az O_1, O_2 pontokon. Az f-re tükrözve tehát az f_1 és CG egyenesek O_1 metszéspontja átmegy az f_2 és CG egyenesek O_2 metszéspontjába. Ebből – mivel f átmegy O-n – következik a bizonyítandó $OO_1 = OO_2$ egyenlőség.

b) Legyen $O_1O = x$, $OA = r$, $BAD\sphericalangle = \alpha$, és a CD oldal felezőpontja K. Ekkor $DOK\sphericalangle = DOC\sphericalangle/2 = DOB\sphericalangle/4 = \alpha/2$, másrészt, mivel $F_1CD\sphericalangle = DCG\sphericalangle = F_1CO_1\sphericalangle/2$, ezért K az $O_1F_1 = r - x$ szakaszt is felezi; ennélfogva a DOK derékszögű háromszögből

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos DOK\sphericalangle = \frac{OK}{OD} = \frac{OO_1 + O_1K}{OD} = \frac{x + \dfrac{r-x}{2}}{r} = \frac{x+r}{2r},$$

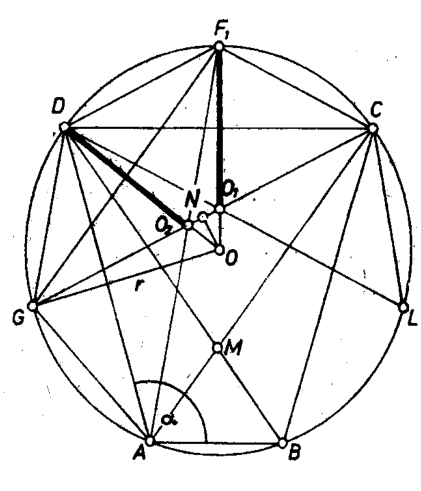
és innen

$$x = r\left(2\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right). \tag{1}$$

(Tusnády Gábor)

Megjegyzés. Nem kellett felhasználnunk, hogy $AB > CD$, ezért bizonyításunk AB és CD bármilyen nagyságviszonya esetén érvényes. Ugyanígy x kifejezése is, mert $COD\sphericalangle = AOD\sphericalangle = BOC\sphericalangle = \alpha$, így a C-t tartalmazó AOB szög mértékszáma $3\alpha < 360^\circ$, ezért $\alpha/2 < 60^\circ$, tehát (1)-ben r szorzója pozitív.

II. megoldás. *a)* Tovább is a fenti jelöléseket használjuk, és O_1-et úgy tekintjük, mint a H_1-beli C és D szögek felezőinek metszéspontját, O_2-t pedig mint a H_2-beli C és A szögek felezőinek metszéspontját. Eszerint DO_1 átmegy az A-t nem tartalmazó BC ív L felezőpontján, AO_2 pedig F_1-en (2. ábra).



2. ábra

A föltevések szerint a C-t tartalmazó AB ívet a G, D, F_1, C, L pontok egyenlő részekre osztják, emiatt az $AGDF_1$, GDF_1C, DF_1CL négyszögek egybevágó húrtrapézok, következésképpen $GD\|AF_1$, $DF_1\|GC$, $F_1C\|DL$. Így a DGO_2F_1 és DF_1CO_1 négyszögek egybevágó rombuszok, megfelelő átlóik egyenlők: $DO_2 = F_1O_1$. Mindegyik átló meghosszabbítása átmegy O-n, mert pl. a DO_2 egyenes a GF_1 húr felező merőlegese, ezért a DO, F_1O sugarak további szakaszaira $O_2O = O_1O$, amit bizonyítanunk kellett.

b) A fentiek szerint az O_1O_2 szakasz N felezőpontja egyszersmind CG-t is felezi, így az OO_2N és OGN derékszögű háromszögekből

$$x = O_2O = \frac{ON}{\cos O_2ON\sphericalangle} = \frac{r\cos GON\sphericalangle}{\cos O_2ON\sphericalangle} = r\frac{\cos 3\alpha/4}{\cos\alpha/4} = r(4\cos^2\alpha/4 - 3) = r(2\cos\alpha/2 - 1).$$

(Felhasználtuk a bármely β szögre fennálló
$\cos 3\beta = \cos 2\beta\cos\beta - \sin 2\beta\,\sin\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta, 2\cos^2\beta = 1 + \cos 2\beta$ azonosságokat, továbbá hogy $\alpha/4 < 30°$, így $\cos\alpha/4 \neq 0$.)