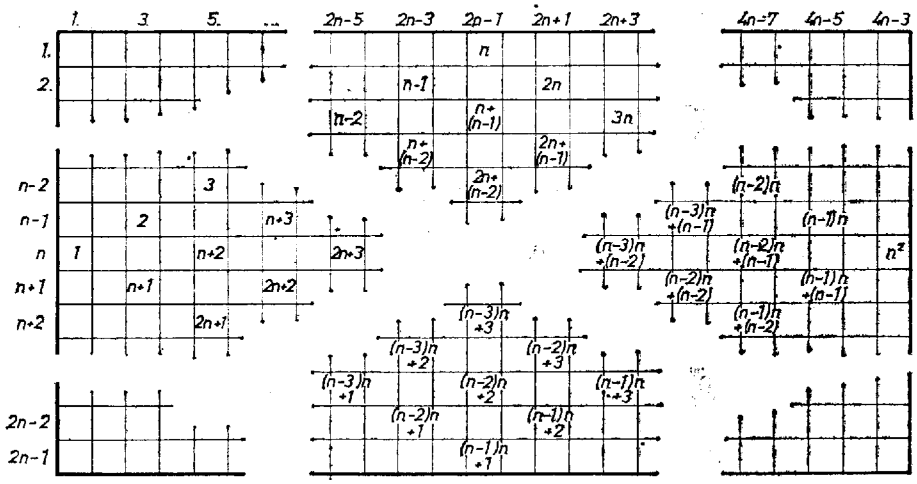
**I.** A bélyegző az $1, 2, \ldots, n^2$ számok mindegyikét egyszer tartalmazza, így bármelyik számunknak a papíron való két előfordulása két különböző lenyomatba tartozik bele, tehát a két megfelelő mezőnek mind a soraihoz, mind az oszlopaihoz tartozó sorszámok különbsége az $n$ számnak többszöröse (természetesen a 0-t is beleértve). Így ha a papírra egy $n$ sorból és $n$ oszlopból álló négyzet alakú keretet teszünk – oldalaival a lenyomatok vonalaira –, akkor egyetlen szám sem látható kétszer a kereten belül, hiszen a keretbeli sorok, oszlopok sorszámai közti különbségek legnagyobbika $n-1$, ti. az alsó és felső sor, ill. a jobb szélső és a bal szélső oszlop sorszámai között. Nem lehet viszont, hogy számaink valamelyike ne forduljon elő a keretben. Ha ugyanis a számnak egy előfordulását megpróbáljuk kirekeszteni a keretből úgy, hogy ennek pl. a bal oldalvonalát áttoljuk rajta (a kirekesztendő szám mezejének jobb oldal vonalára), akkor a számnak $n$ oszloppal jobbra levő előfordulása belép a keretbe a jobb oldali oldalvonalon át, és ugyanez áll a sorokra is.




*1. ábra*

Megmutatjuk azt is, hogy a keretben látható $n^2$ mező mindegyike egy és csak egy számot tartalmaz, a lenyomatok nem fedik át egymást, vagyis helyes „a papír megtöltött részéről” beszélni.

Mivel a bélyegző sorainak száma $2n-1$, azért egymásba csak olyan két lenyomat sorai nyúlhatnak, amelyek sorszámainak különbsége $n$. Elég annak a hatását tekinteni, ha az 1. lenyomathoz képest az alsó felét toljuk föl $n$ sorral. Ekkora középső oszlop – ti. az $n, n+(n-1), \ldots, (n-1)\cdot n+1$, számokat tartalmazó oszlop – alsó felének számai üres közbülső mezőkre jutnak, mert az 1. lenyomat ezen oszlopában a mezők váltakozva foglaltak és üresek, a foglalt mezők sorának sorszámai (felülről értve) páratlanok, az üreseké párosak, a 2. lenyomatban viszont $n$-nel – egy páratlan számmal – kisebbek, tehát a 2. lenyomatbeli számok páros sorszámú sorba, azaz üres mezőre jutnak. Így pedig a 2. lenyomat többi számai sem juthatnak foglalt mezőkre, mert a foglalt mezők minden sorban 4 oszloponként követik egymást, és ennélfogva üres mezőtől jobbra és balra 4 oszloppal ismét üres mezőt találunk.

A fölhasznált állítások a beírási utasításból adódnak: egy számtól a bélyegzőn úgy jutunk el a közvetlen alatta levő számhoz – amennyiben van alatta szám –, hogy egyszer balra lefelé és egyszer jobbra lefelé lépünk két oszloppal és egy sorral (és a két lépés sorrendje föl is cserélhető), tehát a közvetlen alatta levő szám két sorral lejjebb áll; azt is látjuk ebből, hogy a köztük levő sorbeli üres mezőtől balra és jobbra is üres áll, és a balra, jobbra második mezők foglaltak, oszlopaik sorszámának különbsége tehát 4.

Mindjárt itt megjegyezzük, hogy meggondolásunk szerint a bélyegzőn minden szám alatt 2 mezővel a nála $(n-1)$-gyel nagyobb szám áll, vagy üres mező, és minden számtól jobbra 4 mezővel az $(n+1)$-gyel nagyobb szám vagy üres mező, hiszen a jobbra emelkedő (balra süllyedő) lépés 1-gyel növel, ill. csökkent, a másik fajta lépés pedig $n$-nel.

Áttérve állításunknak a vízszintes eltolásokra vonatkozó részére, elég a $2n$ mezőnyi eltolásokkal foglalkoznunk, hiszen az 1. lenyomat csak páratlan sorszámú oszlopokba visz számokat, ezért az $n$ mezővel jobbra eltolt lenyomat csak páros sorszámúakba és a foglaltság kérdése csak az újabb $n$ mezővel jobbra való eltolás számaira lép fel. Mármost páratlan szám 2-szerese 4-gyel osztva maradékul 2-t ad, ott tehát üres mező van, hiszen csak olyan mező foglalt, amelyre az oszlopok sorszámainak különbsége 4-nek többszöröse, tehát 4-gyel osztva a maradék 0. Az 1. lenyomattól jobbra $4n$ mezővel képezve új lenyomatot, ez már nem nyúlik az elsőbe, mert a bélyegző oszlopainak száma csak $4n-3$.

Ezzel beláttuk, hogy a lenyomatokat vízszintesen $2n$, függőlegesen $n$ többszöröseivel eltolva nincs átfedés, és ezzel megtöltjük a papír páratlan sorszámú oszlopait. Ugyanez áll egymás között azokra a lenyomatokra, amelyekben vízszintesen az $n$ szám páratlan többszöröseit vesszük eltolásnak.

**II.** Áttérünk az összegek kérdésére. Legyen $j$ olyan sorszám, amelyre $1 \leqq j \leqq n$ – vagyis a bélyegző $j$-edik sora a felső félben van, vagy maga a középső sor –, és számítsuk ki a bélyegző (felülről számított) $j$-edik és az $n+j$-edik sorában álló számok összegét, vagyis azokét a számokét, amelyek a papíron egy sorban állnak. Azt kell kapnunk, hogy ez független $j$-től.

A $j$-edik sor első száma $n-(j-1)$, tagjainak száma $j$, és mint láttuk, tagról tagra $(n+1)$-gyel nőnek. Így összegük, a számtani sorozat összegképletét alkalmazva:

$$\frac{j}{2}\{2(n-j+1)+(j-1)(n+1)\}. \tag{1}$$

Az $(n+j)$-edik sor első száma $1+jn$, tagjainak száma $n-j$, mert az $n$-edik sorban $n$ szám áll (hiszen első száma 1, utolsó száma $n^2$, és ehhez $(n^2-1):(n+1)=(n-1)$ lépéssel jutunk el) és tovább a sor sorszámát 1-gyel $-1$-gyel növelve a tagok száma 1-gyel $-1$-gyel fogy. (Innen is látjuk, hogy a vizsgált két sorban együttvéve $n$ szám áll.) Így a $(j+n)$-edik sor számainak összege

$$\frac{n-j}{2}\{2(1+jn)+(n-j-1)(n+1)\}$$

ami (**1**)-gyel együtt

$$\frac{n(n^2+1)}{2}, \tag{2}$$

amint vártuk. (Ez $j=n$ esetére is érvényes, mert ekkor – bár nincs $n+j$-edik sor, de benne $n-j$, azaz 0 taggal számoltunk.)

Legyen másrészt $k$ olyan páratlan sorszám, melyre $1 \leqq k \leqq 2n-1$ – vagyis a bélyegző $k$-adik oszlopa (az üres oszlopokat is számba véve) a bélyegző bal oldali felében van vagy maga a középső oszlop –, és számítsuk ki a bélyegző $k$-adik és $(k+2n)$-edik oszlopában álló – a fentiek szerint a papíron egy oszlopba kerülő – számok összegét.

A $k$-adik oszlop felső száma $\dfrac{k+1}{2}$ (egész), tagjainak száma ugyanennyi, a $(k+2n)$-edik oszlopra pedig ugyanezek a számok $\dfrac{k+3}{2}\cdot n$, ill. $\dfrac{2n-k-1}{2}$, tehát az összeg – mint $(n-1)$ differenciájú számtani sorozatok összege:

$$\frac{k+1}{4}\left\{(k+1)+\frac{k-1}{2}(n-1)\right\}+\frac{2n-k-1}{4}\left\{(k+3)\cdot n+\frac{2n-k-3}{2}(n-1)\right\}=$$
$$=\frac{n(n^2+1)}{2},$$

függetlenül $k$-tól és megegyezésben (2)-vel. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

**III.** Az 1165. gyakorlatban Marci guruló bélyegzőjével azt a számkövezetet kaptuk – lásd az ottani 2. ábrát –, ami az itteni pecsétnek egy oszlopra való tükrözésével állna elő $n=5$ esetében. Ott láttuk, hogy minden átlós összeg – a keret elhelyezésétől függetlenül – egyezik a sorok és az oszlopok összegével. Ugyanezt tapasztaljuk $n=7$ esetén (2. ábra), ebben a két esetben bélyegzőnk ún. *minden átlójában bűvös* – az irodalomban bevett idegen kifejezéssel – *pándiagonális* bűvös követetet állít elő.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 21 | 30 | 46 | 13 | 22 | 38 | 5 | 21 |
| 29 | 45 | 12 | 28 | 37 | 4 | 20 | 29 | 45 |
| 11 | 27 | 36 | 3 | 19 | 35 | 44 | 11 | 27 |
| 42 | 2 | 18 | 34 | 43 | 10 | 26 | 42 | 2 |
| 17 | 33 | 49 | 9 | 25 | 41 | 1 | 17 | 33 |
| 48 | 8 | 24 | 40 | 7 | 16 | 32 | 48 | 8 |
| 23 | 39 | 6 | 15 | 31 | 47 | 14 | 23 | 39 |
| 5 | 21 | 30 | 46 | 13 | 22 | 38 | 5 | 21 |
| 29 | 45 | 12 | 28 | 37 | 4 | 20 | 29 | 45 |

*2. ábra*

$n=9$ esetén mindkét átlós irány mentén csak $3-3$ átlón annyi az összeg, mint a sorokon és oszlopokon, így a 81 szám közül 9 olyan, hogy a négyzet közepének választva bűvös négyzetet kapunk, ezek mellett a 3. ábrán csillag áll.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 67 | 47 | 36 | 16 | 77 | 57 | 37 | 26 | 6 | 67 | 47 |
| 35 | 15 | 76 | 56 | 45 | 25 | 5 | 66 | 46 | 35 | 15 |
| 75 | 55 | 44* | 24 | 4 | 65* | 54 | 34 | 14* | 75 | 55 |
| 43 | 23 | 3 | 64 | 53 | 33 | 13 | 74 | 63 | 43 | 23 |
| 2 | 72 | 52 | 32 | 12 | 73 | 62 | 42 | 22 | 2 | 72 |
| 51 | 31 | 11* | 81 | 61 | 41* | 21 | 1 | 71* | 51 | 31 |
| 10 | 80 | 60 | 40 | 20 | 9 | 70 | 50 | 30 | 10 | 80 |
| 59 | 39 | 19 | 8 | 69 | 49 | 29 | 18 | 79 | 59 | 39 |
| 27 | 7 | 68* | 48 | 28 | 17* | 78 | 58 | 38* | 27 | 7 |
| 67 | 47 | 36 | 16 | 77 | 57 | 37 | 26 | 6 | 67 | 47 |
| 35 | 15 | 76 | 56 | 45 | 25 | 5 | 66 | 46 | 35 | 15 |

*3. ábra*

*Megjegyzések.* **1**. A 2. és 3. ábrát úgy vágtuk ki a bűvös kövezetből, hogy a keret közepén a beírt számok közül a középső $\left(n^2+1\right)/2$ álljon, a vonalak összegének $n$-edrésze. Ez azt eredményezte, hogy bármely két, a keret középpontjára tükrös helyzetű mezőpáron olyan két szám áll, amelyek összege $n^2+1$, vagyis amelyek a beírt számok növekvő felsorolásában elölről és hátulról ugyanannyiadik helyen állnak.

**2.** A bélyegzőnk elvével keletkező kövezetnek pándiagonális voltáról lásd ezen számunk 97. oldalán olvasható cikket.