4. Függvények konvex voltának egyszerűbb algebrai feltételei

Ismételjük röviden meg eddigi gondolatmenetünket. Észrevettük, hogy bizonyos egyenlőtlenségek geometriailag értelmezhetők, azt fejezik ki, hogy valamely függvényt ábrázoló görbe konvex, (alulról domború), vagy konkáv (alulról homorú). Így ha egy függvény képének a domborúságáról (a függvény domborúságát fogjuk röviden mondani helyette) tájékozódni tudunk, akkor ebből bizonyos egyenlőtlenségek érvényességére következtethetünk. A domborúság megállapításában azonban nem szorítkozhatunk a geometriai szemléletre, mert erősen függ a rajzolás pontosságától és szemünk élességétől. A domborúságra megbízhatóan éppen alkalmas egyenlőtlenségek teljesítéséből következtethetünk. Pl. ha $x_1 \neq x_2$ (amit a továbbiakban mindig fel fogunk tenni) tetszés szerinti abszcissza értékek, továbbá q_1 és q_2 olyan pozitív „súlyok”, melyek összege 1, akkor az, hogy egy $f(x)$ függvényre teljesül, bármely a feltételnek megfelelő q_1, q_2 számpárra az

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) < q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$

kéttagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség, azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény görbéjének két pont közti húrja a görbeív fölött van. Ha ez egy intervallum bármely két abszcisszájára teljesül, akkor abban az intervallumban a függvény konvex.

Így látszólag megfordult a helyzet, mert éppen egyenlőtlenségek fennállását kell bizonyítani ahhoz, hogy szigorú következtetéseket vonhassunk görbék domborúságára, mégis találtunk, és éppen a geometriai szemlélettől vezetve a konvex függvényeknek egyéb jellemző tulajdonságait, amit algebrai formában is megfogalmazhatunk és amik fennállására a fenti egyenlőtlenség teljesüléséből következtethetünk. Így ha egy függvényre igazoltuk a kéttagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség teljesülését, akkor láttuk, hogy mindig teljesül az,

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_kx_k) < q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \ldots + q_kf(x_k)$$

többtagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség is, ahol az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ abszcisszák közt vannak különbözők és $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k$, olyan pozitív számok, amelyek összege 1.

A geometriai szemlélet azt is mutatja, hogy elegendő azt tudni egy görbéről, hogy *minden* húr középpontja a görbe fölött van, már ebből is következtethetünk a görbe konvex voltára, vagyis az

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \tag{1}$$

kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség teljesítéséből már következik a súlyozott és a többtagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség teljesülése is. Ezt egyelőre csak a szemlélet alapján láttuk be. Nézzük most meg, mit tudunk bizonyítani anélkül, hogy a geometriai szemléletre hivatkoznánk.

Tegyük fel, hogy teljesül egy függvényre az (1) egyenlőtlenség. Ebből közvetlenül a négytagú hasonló egyenlőtlenségre következtethetünk.

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{x_3+x_4}{2}}{2}$$

folytán ugyanis kétszer alkalmazva az (1) egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) = f\left(\frac{\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{x_3+x_4}{2}}{2}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\dfrac{x_3+x_4}{2}\right)}{2} \leqq \frac{\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\dfrac{f(x_3)+f(x_4)}{2}}{2} =$$

$$= \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}.$$

Meg kell engednünk az egyenlőség fennállását is, mert ha az x-ek közt vannak is különbözők, akkor is előfordulhatnak a kéttagú számtani közepek számlálóiban egyenlő számok is és így a megfelelő egyenlőtlenség helyébe egyenlőség lép. Nem fordulhat elő azonban mindegyik törtben ez az eset, és így az első és utolsó kifejezés közt mindig a $<$ jel lesz érvényes. Így

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}.$$

Hasonlóan következtethetünk most a 8-tagú, majd a 16, 32-tagú egyenlőtlenségre és így tovább. Általában megmutatjuk, hogy (1)-ből következik a 2^j tagú egyenlőtlenség minden pozitív egész j-re. A bizonyítás teljes indukcióval történhet $j = 1$-re feltevés szerint igaz az állítás. Legyen most $j = k$ és tegyük fel, hogy $j = k - 1$-re igazoljuk, hogy az (1)-ből következik az

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^{k-1}})}{2^{k-1}}$$

egyenlőtlenség. Vegyünk most 2^k számú abszcisszát. Ekkor (1) és a feltétel szerint

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right)=$$

$$=f\left(\frac{\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}+\dfrac{x_{2^{k-1}+1}+x_{2^{k-1}+2}+\ldots+x_{2^k}}{2^{k-1}}}{2}\right)\leqq$$

$$\leqq\frac{f\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right)+f\left(\dfrac{x_{2^{k-1}+1}+x_{2^{k-1}+2}+\ldots+x_{2^k}}{2^{k-1}}\right)}{2}\leqq$$

$$\leqq\frac{\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^{k-1}})}{2^{k-1}}+\dfrac{f(x_{2^{k-1}+1})+f(x_{2^{k-1}+2})+\ldots+f(x_{2^k})}{2^{k-1}}}{2}=$$

$$=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^{k-1}})f(x_{2^{k-1}+1})+f(x_{2^{k-1}+2})+\ldots+f(x_{2^k})}{2^k}.$$

és itt ismét valahol a $<$ jel lesz az érvényes, vagyis következik az állítás helyessége k-ra is. Ezzel igazoltuk az állítás helyességét minden j értékre.

Hátra van azonban még az állítás igazolása a 2 hatványaitól különböző tagszámok esetében. Cauchy francia matematikus egy rendkívül egyszerű gondolattal fejezte be a bizonyítást: azt mutatta meg, hogy ha valamilyen tagszámra helyes az egyenlőtlenség, akkor helyes minden kisebb tagszám esetén is. Ez azon múlik, hogy a számtani középnek egyik tulajdonsága, hogy ezt hozzávéve a már meglevő számokhoz. A keletkező eggyel több szám számtani közepe ugyanaz lesz, mint az eredeti számoké volt. Valóban ha

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

akkor

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+x}{n+1}=\frac{nx+x}{n+1}=x.$$

Hasonlóan, ha az eredeti számokhoz még több újat (pl. m számút) veszünk hozzá, melyek mindegyike x-szel egyenlő, akkor is változatlan marad a számtani közép:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+mx}{n+m}=\frac{nx+mx}{n+m}=x.$$

Hogyha k most tetszés szerinti pozitív egész szám és az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ abszcisszák közt vannak különbözők, a számtani közepük pedig x, akkor keressünk 2-nek egy k-nál nagyobb hatványát, legyen ez 2^j. Legyen $l=2^j-k$. Ekkor a mondottak és a már bizonyított egyenlőtlenség szerint

$$f(x)=f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right)=f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k+lx}{2^j}\right)<$$
$$<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_k)+lf(x)}{2^j}.$$

Innen

$$\left(1-\frac{l}{2^j}\right)f(x)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_k)}{2^j}$$

és $1-\dfrac{l}{2^j}=\dfrac{2^j-l}{2^j}=\dfrac{k}{2^j}$-vel átosztva

$$f(x)=f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_k)}{k}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogyha egy függvényre teljesül a kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség, akkor teljesül minden k-ra a k tagú szimmetrikus egyenlőtlenség is. [1]

Ebből már tudunk következtetni olyan súlyozott Jensen-egyenlőlenségek teljesülésére is, melyekben racionális számok a súlyok. Legyenek $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ adott abszcisszák és legyenek adva $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k$ racionális súlyok, melyek

[1] Ezzel a 339. feladatnak adtuk megoldását.

összege 1. Ezeket hozzuk közös nevezőre, legyen ez p, tehát $q_1 = p_1/p$, $q_2 = p_2/p$, $\ldots$, $q_k = p_k/p$. $q_1 + q_2 + \ldots + q_k = 1$ folytán $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = p$. Így

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_kx_k) = f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k}{p}\right) =$$

$$= f\left(\frac{\overbrace{x_1 + \ldots + x_1}^{p_1-\text{szer}} + \overbrace{x_2 + \ldots + x_2}^{p_2-\text{ször}} + \ldots + \overbrace{x_k + \ldots + x_k}^{p_k-\text{szor}}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}\right) <$$

$$< \frac{\overbrace{f(x_1) + \ldots + f(x_1)}^{p_1-\text{szer}} + \overbrace{f(x_2) + \ldots + f(x_2)}^{p_2-\text{ször}} + \ldots + \overbrace{f(x_k) + \ldots + f(x_k)}^{p_k-\text{szor}}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_k} =$$

$$= \frac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \ldots + p_kf(x_k)}{p} = q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \ldots + q_kf(x_k)$$

amivel igazoltuk állításunkat. [2]

Látszólag már alig választ el valami a kérdés egész általános megoldásától. Eredményünket ki kellene még terjeszteni irracionális súlyokra is, és erre az adna módot, hogy egy irracionális számhoz akármilyen közel van racionális szám is. Valóban ennek a lépésnek nincs komoly nehézsége, ha tudjuk, hogy a függvény nem változik hirtelen ugrásszerűen (más esetben az állítás sem mindig igaz). Ennek a kikötésnek a precíz matematikai megfogalmazása és az az okoskodásmód, amivel ebből további következtetéseket vonhatnánk, ha nem is okoz már komoly nehézséget, számunkra igen szokatlan volna. Így beérjük azzal, hogy szemléletünk szerint az olyan függvények, amelyek egy összefüggő vonallal megrajzolhatók – más szóval folytonosak, – bírnak a mondott tulajdonsággal. Ismételjük azonban, hogy a hátralevő lépések is megtehetők teljes matematikai szigorúsággal és bebizonyítható egész általánosan, hogy ha egy függvény egy számközben eleget tesz az (1) egyenlőtlenségnek és folytonos, akkor teljesül rá tetszés szerinti súlyokkal és akárhány taggal a súlyozott Jensen-egyenlőtlenség is. Így igaz az is, hogy bármely húr a függvénygörbe megfelelő íve fölött halad, tehát a görbe alulról domború ebben a számközben.

Ezzel a cikk elején mondottakhoz képest nagy haladást tettünk, mert ezután a kéttagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség igazolása helyett elegendő a szimmetrikus egyenlőtlenség teljesülését igazolni, abból is következik, hogy a függvény konvex, tehát teljesül rá a két és a többtagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség is. A konkáv, tágabb értelemben konvex és tágabb értelemben konkáv függvényekre is hasonló érvényes, azzal a különbséggel, hogy ilyenkor $<$ helyett $>$, $\leqq$ ill. $\geqq$ jel áll. Tehát egy $f(x)$ függvény pl. akkor és csakis akkor konkáv, ha bármely két különböző x_1, x_2 számra teljesül az

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

egyenlőtlenség, és hasonló egyenlőtlenségek jellemzik a többi tulajdonságokat is.

Vizsgáljuk pl. a 10^x függvényt.

$$10^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{10^{x_1}10^{x_2}} < \frac{10^{x_1} + 10^{x_2}}{2}$$

a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint. 10^x tehát konvex függvény, de ugyanez igaz bármely 1-től különböző pozitív a szám hatványára is, mert egész hasonlóan

$$a^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{a^{x_1}a^{x_2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2}.$$

A logaritmus függvényre, ha x_1 és x_2 pozitív,

$$\lg\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \lg(\sqrt{x_1x_2}) = \frac{\lg x_1 + \lg x_2}{2},$$

tehát a tízes alapú logaritmus konkáv függvény. Itt az első lépésben kihasználtuk azt is, hogy az $\lg x$ függvény értéke csökken, ha x csökken. Ez csak 1-nél nagyobb alapszámú logaritmusra igaz, így ha $a > 1$

$$\overset{a}{\smile}\!\!\log\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \overset{a}{\smile}\!\!\log(\sqrt{x_1x_2}) = \frac{\overset{a}{\smile}\!\!\log x_1 + \overset{a}{\smile}\!\!\log x_2}{2};$$

ha viszont $0 < a < 1$, akkor

$$\overset{a}{\smile}\!\!\log\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \overset{a}{\smile}\!\!\log(\sqrt{x_1x_2}) = \frac{\overset{a}{\smile}\!\!\log x_1 + \overset{a}{\smile}\!\!\log x_2}{2}.$$

[2] Ezzel megoldását adtuk a 341. feladatnak.

A logaritmus függvény tehát 1-nél nagyobb alapszám esetén konkáv, 1-nél kisebb alapszám esetén viszont konvex.

A bebizonyított egyenlőtlenségek egyik következménye, hogy a $\lg x$ függvényre teljesül a súlyozott Jensen-egyenlőtlenség tehát, ha x_1, x_2, q_1 és q_2 pozitív és $q_1 + q_2 = 1$, akkor

$$\lg(q_1 x_1 + q_2 x_2) > q_1 \lg x_1 + q_2 \lg x_2.$$

Miután 10^x értéke csökkenő x-szel csökken, így ugyanilyen egyenlőtlenség áll azok közt a számok közt is, amiknek a bal-, ill. jobboldal a logaritmusa:

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 = 10^{\lg(q_1 x_1 + q_2 x_2)} > 10^{q_1 \lg x_1 + q_2 \lg x_2} = x_1^{q_1} x_2^{q_2}.$$

A baloldalon a két szám súlyozott számtani közepe áll, a jobboldalt nevezzük a súlyozott mértani középnek; (ha $q_1 = q_2 = 1/2$, akkor éppen a közönséges mértani közepet kapjuk). Azt kaptuk tehát, hogy két szám súlyozott számtani közepe nagyobb az ugyanazon súlyokkal súlyozott mértani középnél. Ha a többtagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget írjuk fel, akkor ugyanígy kapjuk, hogy akárhány szám súlyozott számtani közepe mindig nagyobb az ugyanazokkal a súlyokkal súlyozott mértani középnél. Ezeket bizony nem volna könnyű a fenti tétel igénybevétele nélkül közvetlenül igazolni.

Ha a nyert egyenlőtlenséget az $y_1 = 1/x_1$, $y_2 = 1/x_2$ számokra írjuk fel, akkor azt kapjuk, hogy

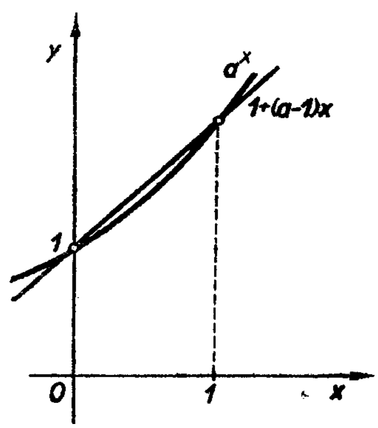
$$\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2} = q_1 y_1 + q_2 y_2 > y_1^{q_1} y_2^{q_2} = \left(\frac{1}{x_1}\right)^{q_1} \left(\frac{1}{x_2}\right)^{q_2},$$

vagyis

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2} > \frac{1}{(q_1/x_1) + (q_2/x_2)}.$$

A jobboldali mennyiséget nevezzük súlyozott harmonikus középnek. A súlyozott mértani közép tehát a súlyozott számtani és a súlyozott harmonikus közép közé esik. [3]

A kitevős függvény konvexségéből még egy fontos egyenlőtlenséget olvashatunk le: vegyük az $x = 0$ és $x = 1$ abszcisszájú pontok közti húrt. Az a^x függvény értéke e helyeken 1, és a.



A (0, 1), (1, a) pontokon átmenő egyenes x abszcisszájú pontjának ordinátáját az $1 + (a-1)x$ függvény adja meg. Ez az egyenes több pontban nem metszheti a görbét, mert akkor volna olyan húr, amelynek a belsejében is van közös pontja a görbével, ami a konvexség miatt lehetetlen. A görbe tehát a két pont közt a húr alatt van, azon kívül pedig mindig fölötte. Ezt egyenlőtlenség formájában így írhatjuk: ha $a \neq 1$, és pozitív, akkor

$$a^x > 1 + (a-1)x, \quad \text{ha} \quad x > 1 \text{ és ha } x < 0,$$

és

$$a^x < 1 + (a-1)x, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1.$$

Célszerűbb $a - 1$-et jelölni egy betűvel, pl. h-val. Ekkor $h > -1$, $h \neq 0$ esetén.

$$(1+h)^x > 1 + hx \text{ ha } x > 1 \text{ és ha } x < 0,$$
$$(1+h)^x < 1 + hx \text{ ha } 0 < x < 1.$$

Ezt az egyenlőtlenséget felfedezőjéről Bernoulli-egyenlőtlenségnek nevezik. [4]

Ebből leolvashatjuk például, hogy minden pozitív számnak, akármilyen nagy, vagy akármilyen kicsi legyen is, az n-edik gyöke, tetszés szerint közel kerülhet 1-hez, ha n-et elég nagynak választjuk, aminek később hasznát fogjuk

[3] Ezzel megoldását adtuk a 342. feladatnak.

[4] Ezzel megoldását adtuk a 343. feladatnak.

venni. Valóban írjuk a számot, ha 1-nél nagyobb, $1+h$ alakba, (h pozitív). A Bernoulli-egyenlőtlenséget $x=1/n$-nel alkalmazva

$$1 < \sqrt[n]{1+h} = (1+h)^{1/n} < 1 + \frac{h}{n},$$

és bármilyen nagy is h, választhatjuk n-et úgy, hogy ez tetszés szerint kevéssel különbözzék 1-től. Ha viszont 1-nél kisebb számból vonunk gyököt, akkor írjuk a számot $1-k$ alakba, ahol $0<k<1$. Ekkor $x=-1/n$-nel fogjuk alkalmazni a megfelelő Bernoulli-egyenlőtlenséget:

$$1 > \sqrt[n]{1-k} = (1-k)^{1/n} = \left(\frac{1}{1-k}\right)^{-1/n} = \left(1+\frac{k}{1-k}\right)^{-1/n} >$$
$$> 1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{k}{1-k} = 1 - \frac{k/(1-k)}{n}.$$

Ha k közel van 1-hez, akkor az utolsó tag számlálója bármilyen nagy lehet ugyan, de egy határozott, n-től független érték. Így n-et mindig választhatjuk úgy, hogy az utolsó levonandó értéke s így $\sqrt[n]{1-k}$-nak az 1-től való eltérése is tetszés szerint kicsi legyen.

5. Hatványközepek közti egyenlőtlenségek

Előző cikkünkben összehasonlítottuk a négyzetes és a számtani közepet. A négyzetes középhez hasonlóan képezhetjük bármilyen n-hez az

$$\sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}$$

n-edik hatványközepet. Vessük fel a kérdést: két különböző hatványközép közül melyik a nagyobb? Megmutatjuk, hogy mindig a nagyobb kitevőhöz tartozó.

Ha először egész n értékekre szorítkozunk, akkor ehhez nyilvánvalóan elég annyit megmutatni, hogy az n-edik hatványközép nagyobb az $n-1$-ediknél:

$$\sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}} > \sqrt[n-1]{\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1}}{2}}; \tag{2}$$

vagy elegendő a két oldal $n(n-1)$-edik hatványai közti megfelelő egyenlőtlenséget megmutatni:

$$\left(\frac{x_1^n + x_2^n}{2}\right)^{n-1} > \left(\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1}}{2}\right)^{n}. \tag{2'}$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk ezt az egyenlőtlenséget. $n=2$-re az x^2 függvényre vonatkozó Jensen-egyenlőtlenség áll előttünk és erről tudjuk, hogy helyes. Tegyük fel, hogy valamilyen n értékre már igazoltuk az egyenlőtlenséget és próbáljuk meg igazolni az eggyel nagyobb kitevőre is, tehát az

$$\left(\frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1}}{2}\right)^{n} > \left(\frac{x_1^{n} + x_2^{n}}{2}\right)^{n+1} \tag{3}$$

egyenlőtlenséget. Nézzük meg, hogy milyen arányban változott meg a baloldal és milyen arányban a jobb. Ha ezen arányszámok közül a baloldali a nagyobb, akkor már igazoltuk állításunkat. Elegendő volna tehát az

$$\frac{1}{2}\frac{(x_1^{n+1} + x_2^{n+1})^n}{(x_1^n + x_2^n)^{n-1}} > \frac{1}{2}\frac{(x_1^n + x_2^n)^{n+1}}{(x_1^{n-1} + x_2^{n-1})^n} \tag{4}$$

egyenlőtlenséget, vagy ehelyett is az átszorzással keletkező

$$\left[(x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1^{n-1} + x_2^{n-1})\right]^n > (x_1^n + x_2^n)^{2n}.$$

egyenlőtlenséget igazolni. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\left[(x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1^{n-1} + x_2^{n-1})\right]^n = \left[x_1^{2n} + x_2^{2n} + x_1^n x_2^n\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)\right]^n >$$
$$> (x_1^{2n} + x_2^{2n} + 2x_1^n x_2^n)^n = (x_1^n + x_2^n)^{2n},$$

és éppen ezt akartuk igazolni. Ez visszarendezhető a (4) egyenlőtlenséggé. Ha ezzel megszorozzuk az indukciós feltevés szerint helyes $(2')$ egyenlőtlenséget, éppen a (3)-at kapjuk, tehát ha teljesül a $(2')$ egyenlőtlenség, teljesül (3) is; ebből pedig következik, hogy minden pozitív egész n-re teljesül a (2) egyenlőtlenség. Ebből természetesen az is következik, hogy ha $s>t$ pozitív egész számok, akkor

$$\sqrt[s]{\frac{x_1^s + x_2^s}{2}} > \sqrt[t]{\frac{x_1^t + x_2^t}{2}}. \tag{5}$$

Ezt felhasználva azonnal következtethetünk a negatív egész kitevős hatványközepekre is. Legyen $s > t$ és alkalmazzuk eredményünket az $1/x_1$, $1/x_2$ számokra:

$$\sqrt[s]{\frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^s + \left(\frac{1}{x_2}\right)^s}{2}} > \sqrt[t]{\frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^t + \left(\frac{1}{x_2}\right)^t}{2}}.$$

Miután mindkét oldalon pozitív számok állnak, reciprokaik közt a fordított értelmű egyenlőtlenség áll:

$$\left(\frac{x_1^{-s} + x_2^{-s}}{2}\right)^{-1/s} < \left(\frac{x_1^{-t} + x_2^{-t}}{2}\right)^{-1/t}.$$

Mivel $-s < -t$, tehát negatív egész kitevőre is az igaz, hogy nagyobb kitevőhöz tartozó hatványközép nagyobb.

Ha a hatványok számtani közepeit súlyozott számtani közepekkel helyettesítjük, akkor a súlyozott hatványközepekhez jutunk. Ezekre is átvihető az állítás: az ugyanazon súlyokkal súlyozott hatványközepek közül mindig a nagyobb kitevőhöz tartozó a nagyobb. A bizonyítás történhetne teljesen hasonlóan, csak a (4) egyenlőtlenség helyett kellene a megfelelő súlyozott egyenlőtlenséget igazolni. Rövidebben is célhoz érhetünk azonban, ha észrevesszük, hogy a (3) egyenlőtlenség átalakítható egy szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséggé. Vonjunk n-edik gyököt és írjunk x_1^n, x_2^n helyett y_1, y_2-t:

$$\frac{y_1^{\frac{n+1}{n}} + y_2^{\frac{n+1}{n}}}{2} > \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Ez azt fejezi ki, hogy a változó $(n+1)/n$-edik hatványára teljesül a kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség. Ebből viszont következik, hogy a függvény konvex s így teljesül rá a kéttagú (és többtagú) súlyozott Jensen egyenlőtlenség is, tehát ha q_1, q_2 pozitív és $q_1 + q_2 = 1$, akkor

$$q_1 y_1^{\frac{n+1}{n}} + q_2 y_2^{\frac{n+1}{n}} > (q_1 y_1 + q_2 y_2)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Írjuk vissza y_1, y_2 helyébe x_1^n, x_2^n-t és vonjunk még $n+1$-edik gyököt is, nyerjük, hogy

$$(q_1 x_1^{n+1} + q_2 x_2^{n+1})^{1/(n+1)} > (q_1 x_1^n + q_2 x_2^n)^{1/n}.$$

Eredményünkből ismét következik természetesen, hogy bármely két pozitív egész kitevőhöz tartozó súlyozott hatványközép közül is a nagyobb kitevőhöz tartozó a nagyobb.

Alkalmazzuk eredményünket $1/x_1$, $1/x_2$-re. Ha s és t pozitív egész számok és $s > t$, akkor

$$\sqrt[s]{q_1\left(\frac{1}{x_1}\right)^s + q_2\left(\frac{1}{x_2}\right)^s} > \sqrt[t]{q_1\left(\frac{1}{x_1}\right)^t + q_2\left(\frac{1}{x_2}\right)^t},$$

vagy mindkét oldal reciprok értékét véve

$$(q_1 x_1^{-s} + q_2 x_2^{-s})^{-1/s} < (q_1 x_1^{-t} + q_2 x_2^{-t})^{-1/t}.$$

Mivel $-s < -t$, ez azt jelenti, hogy negatív kitevőjű hatványközepek közül is a nagyobb kitevőhöz tartozó a nagyobb. [5]

Eredményeinkből újabb függvények konvexségére tudunk következtetni, abból pedig racionális kitevőhöz tartozó hatványközepekre is ki fogjuk tudni terjeszteni eredményeinket. Az (5) egyenlőtlenséget alakítjuk át hasonlóan, mint föntebb a (3)-mal tettük. Emeljük s-edikre mindkét oldalát, és írjunk x_1^t, x_2^t, helyett y_1, y_2-t. Mivel $s > 0$, kapjuk, hogy

$$\frac{y_1^{s/t} + y_2^{s/t}}{2} > \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^{s/t}; \qquad \left(\frac{s}{t} > 1\right)$$

ez pedig azt fejezi ki, hogy a változó 1-nél nagyobb racionális kitevős hatványa is konvex függvény. Ha viszont t-edik hatványra emeltünk, és x_1^s, x_2^s helyett írunk z_1, z_2-t, akkor a

$$\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)^{t/s} > \frac{z_1^{t/s} + z_2^{t/s}}{2} \qquad \left(0 < \frac{t}{s} < 1\right)$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami azt fejezi ki, hogy a változó 1-nél kisebb pozitív racionális hatványa konkáv.

Nézzük még meg a változó negatív racionális kitevős hatványait is. Legyen r pozitív racionális szám, akkor a számtani, mértani és harmónikus közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\left(\frac{x_1^{-r} + x_2^{-r}}{2}\right)^{-1} < \sqrt{x_1^r x_2^r} = (\sqrt{x_1 x_2})^r < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^r.$$

[5] Ezzel megoldását adtuk a 347. feladatnak.

Pozitív számokról lévén szó mindkét oldal reciprokát vehetjük:

$$\frac{x_1^{-r}+x_2^{-r}}{2} > \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{-r},$$

tehát a változó negatív racionális kitevős hatványa mindig konvex.

Állításaink érvényesek minden valós kitevőre, az irracionálisakra is, ennek bizonyításához azonban ismét a folytonosság pontos fogalmára volna szükségünk, amire nem fogunk kitérni.

Az utolsó átalakításban másképpen is alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{x_1^{-r}+x_2^{-r}}{2}\right)^{-1} < \sqrt{x_1^r x_2^r} < \frac{x_1^r+x_2^r}{2}$$

és innen $1/r$-edikre emelve

$$\left(\frac{x_1^{-r}+x_2^{-r}}{2}\right)^{-1/r} < \sqrt{x_1x_2} < \left(\frac{x_1^r+x_2^r}{2}\right)^{1/r}$$

Ez az egyenlőtlenség azt mondja, hogy a mértani közép a $-r$-edik és r-edik hatványközép közé esik, bármilyen racionális szám is r.

A hatványközepek közt talált egyenlőtlenségeket mostmár azzal egészíthetjük ki, hogy bármelyik pozitív kitevős hatványközép nagyobb minden negatív kitevőhöz tartozó hatványközépnél, hiszen a mértani közép a kettő közé esik; s így két racionális kitevőhöz tartozó hatványközép közül a nagyobb kitevőhöz tartozó a nagyobb, függetlenül a kitevők előjelétől. [6]

Ha a változó 1-nél nagyobb racionális kitevős hatványa konvex, akkor kielégíti a többtagú szimmetrikus és súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget is; vagyis ha $s>t$; $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k$ pozitív számok, és $q_1+q_2+\ldots+q_k=1$ akkor (az abszcisszákat y-nal jelölve)

$$q_1y_1^{s/t}+q_2y_2^{s/t}+\ldots+q_ky_k^{s/t}+>(q_1y_1+q_2y_2+\ldots+q_ky_k)^{s/t}.$$

Írjunk $y_1=x_1^t,\ y_2=x_2^t,\ \ldots,\ y_k=x_k^t$-t és emeljünk $1/s$-edik hatványra:

$$(q_1x_1^s+q_2x_2^s+\ldots+q_kx_k^s)^{1/s} > (q_1x_1^t+q_2x_2^t+\ldots+q_kx_k^t)^{1/t},$$

tehát akárhány pozitív számra is igaz hogy ha nem mind egyenlő, akkor az ugyanazon súlyokkal súlyozott hatványközepeik közül az a nagyobb, amelyik nagyobb kitevőhöz tartozik.

Gyakorlásul oldjátok meg a következő feladatokat:

371. Melyik a legnagyobb térfogatú azon téglatestek közül, melyeknek *a)* felszíne egyenlő; *b)* élei hosszának összege egyenlő; *c)* átlója egyenlő? *d)* Melyik téglatest átlója a legrövidebb azok közül, amelyek élei hosszának összege egyenlő? Hogyan lehet a feladatokat megfordítani (a 282., 283., 345. feladatokhoz hasonlóan)?

372. Mutassuk meg, hogy

$$a_1+a_2+\ldots+a_k \leqq \sqrt{k}, \qquad \text{ha} \qquad a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2 \leqq 1. \tag{6}$$

Mikor állhat fönn egyenlőség?

373. Hogyan kell az a, b, c pozitív számokat választanunk; ha összegük állandó, hogy az ab^2c^3 kifejezés a lehető legnagyobb legyen?

374. Mutassuk meg, hogy az $\overset{a}{\smile}\!\!\!\log(1+a^x)$ és $\sqrt{1+x^2}$ függvények konvexek.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt[k]{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)} \geqq 1+\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}, \tag{7}$$

és

$$\sqrt{k^2+(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2} \leqq \sqrt{1+a_1^2}+\sqrt{1+a_2^2}+\ldots+\sqrt{1+a_k^2}. \tag{8}$$

Mikor állhat fönn egyenlőség?

375. Körbe írt k oldalú sokszögek közül melyiknek a területe és melyiknek a kerülete a legnagyobb?

*

A hatványközepek közt talált összefüggések felvetnek két kérdést. Láttuk hogy a mértani közép elválasztja a pozitív kitevős hatványközepeket a negatív kitevősektől. Kérdés, mennyire közelíthetik meg a hatványközepek a mértani közepet, ha egyre kisebb abszolút értékű kitevőt választunk. Be fogjátok bizonyítani, hogy a hatványközepek tetszés szerint közel jutnak a mértani középhez. A mértani közepet ebből a szempontból „0-dik hatványközépnek" is tekinthetjük, mert, ha a hatványközepek kitevője közeledik a 0-hoz, a hatványközép tetszés szerint közel kerül a mértani középhez.

[6] Ezzel megoldását adtuk a 348. feladatnak.

Másrészt ha a hatványközép kitevőjét pozitív értékeken minden határon túl növeljük, akkor a hatványközép is állandóan nő, de nem vehet fel akármilyen nagy értékeket, hiszen minden hatványközép kisebb a számok legnagyobbikánál. Hasonlóan minden határon túl növő abszolút értékű negatív kitevők esetén a hatványközép állandóan csökken, de nem válhat kisebbé a számok közül a legkisebbnél. Kérdés, hogy az így növekedő, illetve csökkenő hatványközepek közelednek-e valamilyen határozott értékhez, és ha igen, akkor milyen értékhez. Ezekre is megkapjátok a választ a következő feladatok megoldása során.

Nézzük először az első kérdést. Legyen r pozitív racionális szám, $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ pozitív számok, melyek közt vannak különbözők. A mértani közép és az r-edik hatványközép közti egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k} < \sqrt[r]{\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_k^r}{k}}$$

Célszerű lesz mindkét oldal logaritmusát venni, mert akkor a mértani közép helyére a számok logaritmusának számtani közepe kerül, és így a két oldal szerkezete hasonlóbbá válik:

$$\frac{\lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_k}{k} < \frac{1}{r}\lg\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_k^r}{k}\right).$$

Így viszont a jobboldalon lépett fel egy logaritmus, amit ki szeretnénk küszöbölni. A $\lg x$ függvény konkávságát kifejező egyenlőtlenségre gondolhatnánk, annál is inkább, mert egy számtani középnek a logaritmusa szerepel. Konkávságot kifejező egyenlőtlenség azonban arról adna számot, hogy a jobboldal minél nagyobb, nekünk pedig ellenkező értelmű egyenlőtlenségre volna szükségünk. A konkáv függvényekre is tudunk ilyen természetű egyenlőtlenséget is leolvasni szemléletünk alapján.

376. Legyen m_{10} az $\lg x$ függvény $x = 1$ abszcisszájú pontjában húzott érintőjének a meredeksége, (az érintő emelkedése, mialatt az abszcissza 1-gyel növekszik). Igazoljuk, hogy

$$\lg x < m_{10}(x-1). \tag{9}$$

Igazoljuk ugyancsak *a szemlélet alapján*, hogy $\lg x/(x-1)$ tetszés szerint kevéssel tér el m_{10}-től, amint $x-1$ elég kicsi.

377. Ha a pozitív szám, és r pozitív racionális szám, igazoljuk, hogy

$$\frac{a^r - 1}{r} > \frac{\lg a}{m_{10}}. \tag{10}$$

A baloldal eltérése a jobboldaltól tetszés szerint kicsi lesz, ha r-et elég kicsinek választjuk.

378. Igazoljuk (9) és (10) felhasználásával, hogy ha h akármilyen kicsiny pozitív szám is, választható r olyan kicsire, hogy fennálljon a

$$\lg\ \sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k} < \lg\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_k^r}{k}\right)^{1/r} < \lg\ \sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k} + h \tag{11}$$

egyenlőtlenség.

379. Legyen s negatív racionális szám. Igazoljuk, hogy az s-edik hatványközép is tetszés szerint kevéssel fog különbözni a mértani középtől, ha az s számot elég közel választjuk a 0-hoz.

Térjünk most rá a második felvetett kérdésre. Legyenek $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ pozitív számok, áttekinthetőség kedvéért rendezzük őket mindjárt: növekvő sorrendben: $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$; legyenek $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$ pozitív számok, $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$.

380. Bizonyítsuk be, hogy az adott számoknak ezekkel a súlyokkal súlyozott r-edik hatványközepe, ha r pozitív racionális szám, $q_n^{1/r}a_n$ és a_n közé esik; ha viszont s negatív, akkor az s-edik hatványközép a_1 és $q_1^{1/s}a_1$ közé esik.

381. Mutassuk meg, hogy ha r elég nagy pozitív racionális szám, akkor az r-edik hatványközép tetszés szerint közel juthat a_n-hez; a $-r$-edik hatványközép pedig tetszés szerint közel juthat a_1-hez. (Gondoljunk vissza a Bernoulli-egyenlőtlenséggel kapcsolatos megjegyzésre.)

6. További feltételek függvények konvex voltára

Az eddigiek adhattak némi képet arról, hogy a konvex függvényekre bebizonyított általános tételek segítségével egyrészt nehéznek látszó tételek bizonyítása egész egyszerűen adódik, másrészt egy egységes szempontból sikerül áttekinteni segítségükkel különböző egyenlőtlenségek egész sorát.

Az volt a célunk, hogy már bizonyított egyenlőségekből lehetőleg minél több új egyenlőtlenség helyességére tudjunk következtetni. Ebből a szempontból újabb figyelmet érdemelnek a cikkünk elején a kitevős és logaritmus-függvényre végzett számítások. Igaz, hogy a számítások rendkívül egyszerűek voltak a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség birtokában, mégis feltűnhet, hogy a két függvénynél lényegében ugyanazokat az átalakításokat végeztük el, egyszer a hatványokkal, másodszor a kitevőkkel. Figyeljük meg a különbséget is a két függvénynél: a kitevős függvénynél lényegtelen volt, hogy milyen szám az alap, a logaritmusnál azonban különbséget kellett tenni az 1-nél nagyobb és 1-nél kisebb alapszámok közt.

Mindez nem meglepő, hiszen a két függvény szorosan összefügg. Mindkettő a hatványkitevő és hatvány közti összefüggést fejezi ki, csak az egyik esetben a kitevőhöz keressük a hatványértéket, a második esetben viszont a hatványmennyiség ismeretében a hozzátartozó kitevőt. Általában, ha adva van egy $y = f(x)$ függvény, gyakran merül fel a kérdés, hogy egy adott függvényértéket melyik helyen veszi fel a függvény. Ha minden számbajövő y függvényértékhez megadjuk ezt az x-értéket, ezzel egy $\varphi(y)$ függvényhez jutunk. Ezt az $f(x)$ *inverz függvényének* nevezzük. Ahhoz, hogy az inverz függvénynek határozott értelme legyen, kell, hogy $f(x)$ minden értéket csak egyszer vegyen fel. Folytonos függvényeknél ez akkor következik be, ha a függvényérték növekvő x-ekkel vagy állandóan növekedik, vagy állandóan csökken. Első esetben a függvényt *monoton növekedőnek* nevezzük a második esetben *monoton csökkenőnek.* Az inverz függvényt azzal értelmeztük, hogy az adott függvény függvényértékeihez azon abszcissza-értéket adja meg, melyre a függvény azt a függvényértéket felveszi, tehát az $f(x)$ értékhez éppen x-et. Értelme tehát matematikai formulában így írható: hogy a φ függvény az f inverze, az azt jelenti, hogy $\varphi(f(x)) = x$ minden x-re (pl. $10^{\lg x} = x$, hasonlóan $\sqrt[n]{(x^n)} = x$, $1/(1/x) = x$, stb). Ez a kapcsolat két függvény közt kölcsönös. Ha ugyanis a fenti egyenlőség fennáll, akkor ezt a két egyenlő mennyiséget helyettesítsük f változója helyébe: $f(\varphi(f(x))) = f(x)$ és $f(x)$ helyett ξ-t írva $f(\varphi(\xi)) = \xi$, vagyis f is inverze φ-nek. Nyilvánvaló, hogy ha f monoton növekedő, akkor nagyobb függvényértéket nagyobb abszcisszánál vesz fel, tehát inverze is monoton növekedő; és hasonlóan monoton fogyó függvény inverze is monoton fogyó.

Figyeljük meg, hogy $y = 1/x$ a sajátmaga inverze (úgynevezett involutórius függvény) ez nyilvánvaló, mert az x és y közti összefüggést $xy = 1$ alakban írva bármelyik ismeretlent fejezzük is ki belőle, ugyanazon függvényhez jutunk. Ugyanez áll pl. az $x^2 + y^2 = r^2$ középponti helyzetű körökkel ábrázolható függvényekre, [7] és minden olyan függvényre is, melynek görbéje szimmetrikus az első síknegyed szögfelezőjére.

Legyen most $f(x)$ monoton növő és konvex, tehát teljesüljön rá az (1) egyenlőtlenség. Mivel az f függvény φ inverze is növekedő függvény, így (1) mindkét oldalának φ-függvényét véve

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \varphi\left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) < \varphi\left(\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right).$$

Írjunk most $f(x_1)$ és $f(x_2)$ helyébe ξ_1 és ξ_2-t, ekkor $x_1 = \varphi(\xi_1)$ és $x_2 = \varphi(\xi_2)$ s így kaptuk, hogy

$$\frac{\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)}{2} < \varphi\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right),$$

vagyis monoton növekedő, konvex függvény inverze konkáv.

Ha az f függvény konvex, de monoton fogyó, akkor φ is monoton fogyó és így (1)-ből hasonló okoskodással most az adódik, hogy

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \varphi\left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) > \varphi\left(\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right),$$

azaz

$$\frac{\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)}{2} > \varphi\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right),$$

tehát monoton fogyó konvex függvény inverze is konvex. Hasonlóan látható, hogy növő konkáv függvény inverze konvex, fogyó konkávé pedig konkáv. [8]

Hasonló segítséget jelent az is, ha egy függvényt már ismert függvényekből tudunk összetenni. Vizsgáljuk pl. az a^{x^2} függvényt, ha $a > 1$. Mivel a^x monoton nő és x^2 konvex, így

$$a^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2} < a^{\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

Mivel a^x is konvex függvény, így

$$a^{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} < \frac{a^{x_1^2} + a^{x_2^2}}{2},$$

tehát

$$a^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2} < \frac{a^{x_1^2} + a^{x_2^2}}{2}.$$

a^{x^2} tehát konvex függvény. Általában ha f monoton növő és konvex függvény g pedig konvex, akkor az ezekből összetehető $f(g(x))$ is konvex, mert

$$f\left(g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) < f\left(\frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}\right) < \frac{f(g(x_1)) + f(g(x_2))}{2}.$$

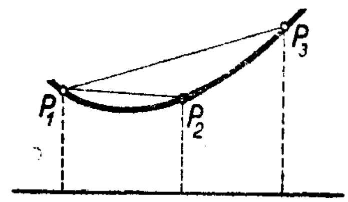
[7] Pontosabban a görbének pl. arra az ívére kell szorítkozni, amelyikre $0 \leqq x \leqq r$, $y \geqq 0$, hogy monoton függvényt kapjunk.

[8] Ezzel megoldását adtuk a 349. feladatnak.

Az első egyenlőtlenség f monoton növekedése és g konvexsége, a második pedig f konvexsége miatt következik. [9]

A Bernoulli-egyenlőtlenségben új egyenlőtlenséget nyertünk – melynek igen sok alkalmazása van a felsőbb matematikában – figyelembe véve a görbe és a szelő viszonylagos helyzetét a metszéspontokon kívül is. Ugyancsak újabb egyenlőtlenségekhez jutottunk akkor is, ha tekintetbe vettük, hogy konkáv görbének valamilyen pontban meghúzva az érintőjét, ez a görbe fölött fut. Egy-egy ilyen tulajdonságot kifejező egyenlőtlenség újabb olyan egyenlőtlenség, aminek helyessége következik abból, ha igazoltuk a kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget. Keressük most konvex görbének további ilyen tulajdonságait, amik egyenlőtlenségekkel fejezhetők ki az algebra nyelvén.

Legyen P_1, P_2, P_3 három pont a görbén, amik abszcisszái, x_1, x_2, x_3 ebben a sorrendben következnek nagyság szerint. Akkor a konvex görbéket jellemzi az is, hogy P_1P_2 húr a P_1P_3 húr alatt fut.



Jellemzi, ezen azt értjük, hogy minden konvex görbének megvan az a tulajdonsága, de megfordítva is, ha egy görbe bármely három pontjára teljesül a fenti tulajdonság; akkor a görbe konvex. Hasonlóan jellemző a konvex görbékre az is, hogy a P_2P_3 húr a P_1P_3 húr alatt van, végül az is, hogy a P_1P_2 húr meghosszabbítása a P_2P_3 húr alatt fut.

382. Fejezzük ki ezeket a tulajdonságokat az algebra nyelvén. Van-e valamilyen kapcsolat a nyert egyenlőtlenségek közt? Bizonyítsuk be a szemlélet felhasználása nélkül, hogy ezek az egyenlőtlenségek akkor és csakis akkor teljesülnek, ha teljesül a kéttagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség. (Gondoljunk vissza az utóbbi levezetésére is.)

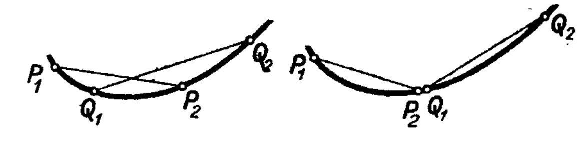
383. Bizonyítsuk be, hogy ha n nő, a $\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ alakú számok növekednek, a $\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ alakúak pedig csökkennek; $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ alakú számok csökkenő sorozatot alkotnak és e sorozat bármelyik eleme nagyobb az $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat minden eleménél.

Mutassuk meg, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^x$ függvény növekvő x-szel nő.

384. Mutassuk meg, hogy a 383. feladatban szereplő a_n és b_n számok tetszőlegesen közel kerülnek egymáshoz, ha n elég nagy.

Így egyetlen egy olyan szám van, mely elválasztja a két sorozat elemeit egymástól. Ezt a számot Euler-féle számnak nevezik és e-vel jelölik.

A konvexitásra jellemző fenti tulajdonságok speciális esetei a következő általánosabbnak. Legyenek a görbén két húr végpontjainak abszcisszái x_1, x_2 és ξ_1, $\xi_2 (x_1<x_2, \xi_1<\xi_2)$, és előzze meg az első húr mindegyik végpontja a másik húr megfelelő végpontját, esetleg az egyik oldali végpontok össze is eshetnek, tehát $x_1 \leqq \xi_1$, $x_2 \leqq \xi_2$, de egyenlőség legfeljebb az egyik helyen állhat.



Ekkor az első húr meredeksége kisebb, mint a másodiké:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}. \tag{12}$$

385. Bizonyítsuk be, hogy a (12) egyenlőtlenségből következnek a 382. feladat egyenlőtlenségei, de megfordítva is azokból minden esetben következtethetünk a (12) egyenlőtlenségre.

386. Legyen $f(x)$ konvex függvény, legyen $u_1 \geqq u_2 \geqq \ldots \geqq u_k$ és $v_1 \geqq v_2 \geqq \ldots \geqq v_k$; vezessük be a

$$D_1=\frac{f(v_1)-f(u_1)}{v_1-u_1},\ D_2=\frac{f(v_2)-f(u_2)}{v_2-u_2},\ \ldots,\ D_k=\frac{f(v_k)-f(u_k)}{v_k-u_k} \tag{13}$$

továbbá az

$$U_1=u_1,\ U_2=u_1+u_2,\ \ldots,\ U_k=u_1+u_2+\ldots+u_k$$

és

$$V_1=v_1,\ V_2=v_1+v_2,\ \ldots,\ V_k=v_1+v_2+\ldots+v_k \tag{14}$$

[9] Ezzel megoldását adtuk a 350. feladatnak.

jelöléseket. Legyen

$$U_1 < V_1,\ U_2 < V_2,\ \ldots,\ U_{k-1} < V_{k-1},\ \text{de } U_k = V_k. \tag{15}$$

Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\begin{gathered} U_1(D_1 - D_2) + U_2(D_2 - D_3) + \ldots + U_{k-1}(D_{k-1} - D_k) + +U_k D_k < \\ < V_1(D_1 - D_2) + V_2(D_2 - D_3) + \ldots + V_{k-1}(D_{k-1} - D_k) + V_k D_k \end{gathered} \tag{16}$$

és

$$u_1 D_1 + u_2 D_2 + \ldots + u_k D_k < v_1 D_1 + v_2 D_2 + \ldots + v_k D_k \tag{17}$$

387. Mutassuk meg, hogy egy $f(x)$ függvény akkor és csakis akkor konvex, ha megvan a következő tulajdonsága: valahányszor $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k$ olyan számok, melyekre

$$u_1 \geqq u_2 \geqq \ldots \geqq u_k; \quad v_1 \geqq v_2 \geqq \ldots \geqq v_k$$

és

$$\begin{gathered} u_1 < v_1,\ u_1 + u_2 < v_1 + v_2,\ \ldots, \\ u_1 + u_2 + \ldots + u_{k-1} < v_1 + v_2 + \ldots + v_{k-1}, \end{gathered} \tag{18}$$

de

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$$

akkor

$$f(u_1) + f(u_2) + \ldots + f(u_k) < f(v_1) + f(v_2) + \ldots + f(v_k). \tag{19}$$

(Az állítás első felének bizonyításához felhasználhatjuk a 386. feladat eredményét, a második felére pedig abból következtethetünk, hogy a fenti egyenlőtlenség alkalmas helyettesítéssel a szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenségbe megy át).

Hardy, Littlewood és Pólya bizonyították, hogy az egyenlőtlenség konvex függvényekre teljesül. Ennek a fenti feladatokból adódó bizonyítása Fuchs Lászlótól származik. Azt, hogy a fenti tulajdonságú függvények mindig konvexek, J. Karamata vette észre.

388. Legyen adva két körbeírt sokszög. Oldalaik legyenek $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_k$ ill. $b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_l$. Tegyük fel, hogy $a_1 < b_1,\ a_2 < b_2,\ \ldots,\ a_l < b_l$. Bizonyítsuk be, bogy az első sokszög kerülete is, területe is nagyobb, mint a másodiké.

7. Többváltozós konvex függvények

A konvex függvény fogalmát könnyen általánosíthatjuk több változóra is. Két változós függvényt még tudunk geometriailag szemléltetni. A két változó értékét egy sík-koordinátarendszerben ábrázoljuk és a függvényértéket minden pontban erre a síkra merőlegesen mérjük fel. Így az összes pontokban felrajzolt függvényértékek egy felületet adnak. Egy ilyen felületet megint csak akkor mondunk konvexnek, ha bármely húrja a felület fölött van. Legyen $F(x,\ y)$ egy kétváltozós konvex függvény $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ két pont. Ezek összekötő egyenesének egy tetszésszerinti pontja, $(q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 y_1 + q_2 y_2)$ alakba írható, ahol q_1 és q_2 pozitív súlyok és $q_1 + q_2 = 1$. Könnyű belátni, ha a két kiválasztott ponton át az alapsíkra merőleges síkot állítunk, hogy a húrnak az utoljára felírt pontban az ordinátája $q_1\ F(x_1,\ y_1) + q_2\ F(x_2,\ y_2)$. Így a fenti tulajdonságot az

$$F(q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 y_1 + q_2 y_2) < q_1 F(x_1, y_1) + q_2 F(x_2, y_2)$$

kétváltozós súlyozott Jensen-egyenlőtlenség fejezi ki. A több változós függvényeket már nem tudjuk ábrázolni, de a konvexitás fogalmát ezekre is értelmezzük, az előzőkhöz hasonló módon. Legyen az $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ függvény egy n változótól függő mennyiség; q_1, q_2 akármilyen pozitív súlyok $q_1 + q_2 = 1$ és $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ két tetszésszerinti számsorozat. Az F függvényt konvexnek mondjuk, ha teljesül rá a következő egyenlőtlenség:

$$\begin{gathered} F(q_1 x_1 + q_2 y_1,\ q_1 x_2 + q_2 y_2,\ \ldots,\ q_1 x_n + q_2 y_n) < \\ < q_1 F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) + q_2 F(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n). \end{gathered} \tag{20}$$

Többváltozós *folytonos* függvény konvexsége is következik már abból, hogy a függvényre teljesül a kéttagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség. Egyszerűség kedvéért ezt kétváltozós függvényre írva fel

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right) < \frac{F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)}{2}. \tag{21}$$

Folytonosságon itt is azt értjük, hogy a függvény nem változik ugrásszerűen, ha az összes változók csak kevéssel változnak. A pontosabb megfogalmazást itt sem akarjuk adni.

(20)-ból éppen úgy következtethetünk, a folytonosságot nem használva fel, arra, hogy a függvényre az

$$F\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}, \frac{y_1+y_2+\ldots+y_k}{k}\right) < \tag{22}$$
$$< \frac{F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)+\ldots+F(x_k,y_k)}{k}$$

k-tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség, sőt még a racionális súlyokkal súlyozott Jensen-egyenlőtlenség is teljesül, mint ahogy azt a 339–341. feladatokban egy változós függvények esetében tettük.

389. Készítsétek el a bizonyításokat több változó esetére is. Ennél tovább azonban ismét csak a folytonosság felhasználásával juthatnánk.

Az is nyilvánvaló, hogy analóg egyenlőtlenségek fogják jellemezni két változó esetén a tágabb értelemben konvex, konkáv és tágabb értelemben konkáv függvényeket több változó esetére pedig éppen ezen egyenlőtlenségek fennállásával értelmezhetjük ezeket a fogalmakat.

390. Bizonyítsuk be, hogy az $F(x,\,y)=\sqrt{xy}$ függvény konkáv, a $\overset{a}{\smile}\!\!\log(a^x+a^y)$ függvény konvex, az $x_1^{q_1}x_2^{q_2}$ és általában az $x_1^{q_1}x_2^{q_2}\ldots x_n^{q_n}$ függvény konkáv (q_1, q_2 ill. $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$ adott pozitív számok, melyekre $q_1+q_2=1$ ill. $q_1+q_2+\ldots+q_n=1$ és az x_1, x_2 ill. $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ változók csak pozitív értéket vehetnek fel.)

Bizonyítsuk be az

$$\left(x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+\ldots+x_1^{(k)}\right)^{q_1}\left(x_2^{(1)}+x_2^{(2)}+\ldots+x_2^{(k)}\right)^{q_2}\ldots$$
$$\ldots\left(x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\ldots+x_n^{(k)}\right)^{q_n} \geqq x_1^{(1)q_1}x_2^{(1)q_2}\ldots x_n^{(1)q_n}+$$
$$+x_1^{(2)q_1}x_2^{(2)q_2}\ldots x_n^{(2)q_n}+\ldots+x_1^{(k)q_1}x_2^{(k)q_2}\ldots x_n^{(k)q_n} \tag{23}$$

egyenlőtlenséget.

391. Legyen $r>1$, $1/r+1/s=1$. Bizonyítsuk be az

$$\left(a_1^r+a_2^r+\ldots+a_n^r\right)^{1/r}\left(b_1^s+b_2^s+\ldots+b_n^s\right)^{1/s} \geqq \tag{24}$$
$$\geqq a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$

ú. n. Hölder-egyenlőtlenséget. Mit kapunk, ha $r=s$-et írunk? (Cauchy – Schwarz-egyenlőtlenség.)

392. Bizonyítsuk be, hogy $\left(\dfrac{x^r+y^r}{2}\right)^{1/r}$ és általában

$$\left(\frac{x_1^r+x_2^r+\ldots+x_n^r}{n}\right)^{1/r} \qquad (r>1)$$

konvex. (Alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtlenséget $b_1=(x_1+x_2)^{r-1}$, $q_2=(y_1+\,+y_2)^{r-1}$ és egyszer $a_1=x_1$, $a_2=y_1$ másszor $a_1=x_2$, $a_2=y_2$ választással. Hasonlóan célhoz érhetünk a második esetben is)

393. Bizonyítsuk be az

$$\left[(a_1+b_1)^r+(a_2+b_2)^r+\ldots+(a_k+b_k)^r\right]^{1/r} \leqq \tag{25}$$
$$\leqq \left(a_1^r+a_2^r+\ldots+a_k^r\right)^{1/r}+\left(b_1^r+b_2^r+\ldots+b_k^r\right)^{1/r}$$

egyenlőtlenséget, ahol $r>1$. (Minkowski-egyenlőtlenség)

394. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{u_1^p}{v_1^{p-1}}+\frac{u_2^p}{v_2^{p-1}}+\cdots+\frac{u_k^p}{v_k^{p-1}} \geqq \frac{(u_1+u_2+\ldots+u_k)^p}{(v_1+v_2+\ldots+v_k)^{p-1}} \tag{26}$$

395. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt[k]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_k+b_k)} \geqq \sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}+\sqrt[k]{b_1b_2\ldots b_k}. \tag{27}$$