2. *Egyenlőtlenségek átalakítása*

Mielőtt egyenlőtlenségekkel foglalkoznánk, először tisztáznunk kell, hogyan lehet egyenlőtlenségeket átalakítani, belőlük újabb helyes egyenlőtlenségeket nyerni. Legyen A és B két valós szám. $A > B$ ugyanazt jelenti, mint hogy az $A - B$ különbség pozitív. (Jelben így is írhatjuk: $A - B > 0$). Az első közleményben a két szám számtani és mértani közepe közt fennálló egyenlőtlenséget is úgy sikerült bizonyítani, hogy különbségük előjelét állapítottuk meg. Hasonlóan bizonyíthatunk más egyenlőtlenségeket is.

Tegyük fel, hogy

$$A > B,$$

(azaz, hogy $A - B$ pozitív).

a) Ekkor $(A + C) - (B + C) = A - B$ is pozitív, tehát

$$A + C > B + C.$$

b) Másrészt $cA - cB = c(A - B)$ pozitív, ha c pozitív, de negatív, ha c negatív, tehát
ha c pozitív, $\quad cA > cB$; $\quad$ ha c negatív $\quad cA < cB$.

c) Vizsgáljuk most A és B hatványait. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ és általában bármely pozitív egész n-re $A^n - B^n = (A - B) \cdot (A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1})$. Az első tényező feltétel szerint mindig pozitív. A második tényező előjeléről biztosat tudunk mondani, ha A is, B is pozitív. Ekkor biztos, hogy a második tényező és vele együtt a szorzat is pozitív, tehát ha $A > B$ és A is B is pozitív, akkor $A^2 > B^2$, $A^3 > B^3$, általában $A^n > B^n$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$.

d) Mit tudunk mondani A és B reciprokáról?

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{B - A}{AB} = -\frac{A - B}{AB}.$$

Ha ismét A is B is pozitív, akkor a nevező is pozitív, feltevés szerint a számláló is pozitív, így a tört negatív az előtte álló előjel miatt, tehát

$$\frac{1}{A} < \frac{1}{B}.$$

Általában $\dfrac{1}{A^n} - \dfrac{1}{B^n} = \dfrac{B^n - A^n}{A^n B^n}$. Ha n pozitív egész és A is B is pozitív számok, akkor a nevező pozitív, a számláló viszont a föntebb végzett átalakítások szerint negatív, így a tört értéke is, tehát

$$\frac{1}{A^n} < \frac{1}{B^n} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

(Ez a *c)* pont alapján következik az éppen bebizonyított $\dfrac{1}{B} > \dfrac{1}{A}$ egyenlőtlenségből is.)

e) Legyen most $A > B$ és $C > D$, vagyis $A - B$ is, $C - D$ is pozitív. Ekkor mindig pozitív $A + C - (B + D) = (A - B) + (C - D)$ is, tehát

$$A + C > B + D.$$

f) Próbáljuk meg $AC - BD$-t is $A - B$ és $C - D$ segítségével kifejezni. E különbségeket rövidebb írás kedvéért b-vel és d-vel jelölve $A = b + B$, $C = d + D$. Így $AC - BD = (b + B)(d + D) - BD = bd + bD + Bd$ (b és d jelentését beírva könnyen látható az azonosság helyessége). Ha itt B is D is pozitív, akkor az utolsó kifejezés is, tehát $AC - BD$ is. A feltételből természetesen az is következik, hogy a B-nél nagyobb A is és a D-nél nagyobb C is pozitív, tehát ha $A < B$, $C < D$ és A, B, C, D pozitív számok akkor

$$AC > BD.$$

Ezt az egyenlőtlenséget bebizonyíthattuk volna már előbb helyesnek bizonyult átalakítások segítségével is. Ugyanis *b)* szerint ha $A > B$ és C pozitív, akkor $AC > BC$. Hasonlóan, ha $C > D$ és B pozitív, akkor $BC > BD$ is fennáll.

Viszont általában ha α, β, és γ három olyan szám, amelyekre

$$\alpha > \beta \quad \text{és} \quad \beta > \gamma \quad \text{akkor} \quad \alpha > \gamma$$

is fennáll, mert $\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)$ és a jobboldalon mindkét kifejezés feltétel szerint pozitív.

Így az előbb nyert egyenlőtlenségekből következik a bizonyítandó $AC > BD$ egyenlőtlenség. [1]

Itt az egyenlőtlenségekben szereplő mennyiségekre bizonyos feltételeknek kell teljesülniök, hogy az egyes következtetéseket levonhassuk. Kérdés azonban, hogy nem teljesül-e valamelyik egyenlőtlenség akkor is mindig, ha a feltételek valamelyikét elhagyjuk? Figyeljük meg pl. az *f)* esetre adott kétféle bizonyítást. Az elsőből szükségesnek látszott B-ről is, D-ről is feltenni, hogy pozitívok. A második bizonyításban viszont csak annyit használtunk fel, hogy B és C pozitív.

---

[1] Ezzel teljes megoldását adtuk a 285. feladatnak.

Megoldotta: Dursi E., Kántor S., Kovács L., Villányi O., Zobor E. ***Részben:*** Rédly E., Reichlin V., Tornyos F., Zatykó L.

Az előbbivel együtt pozitívnak kell lennie A-nak is, de D előjelére nem következik ebből semmi és valóban igaz is, hogy az $AC > BD$ egyenlőtlenség helyes akkor is, ha a kiinduló egyenlőtlenségeken kívül csak A, B és C-ről tudjuk, hogy pozitív, D azonban negatív.

Ennél többet azonban nem lazíthatunk a feltételeken. Ha pl. a két jobboldal negatív, akkor a $2 > -3$, $4 > -2$ egyenlőtlenségpár jobb- és baloldalainak szorzata közt a $8 = 2 \cdot 4 > (-3)(-2) = 6$ egyenlőtlenség áll fenn, viszont a $2 > -3$, $4 > -3$ egyenlőtlenségpár jobb- és baloldalainak szorzata közt a $8 = 2 \cdot 4 < (-3)(-3) = 9$ egyenlőtlenség. Így, ha mindkét jobboldal negatív, akkor azt sem állíthatjuk, hogy mindig a baloldalak szorzata a nagyobb, de azt sem, hogy mindig a jobboldalaké, mert mindkét esetben van olyan „ellenpéldánk”, amiben nem ez az eset következik be.

Mivel $-1 > -2, 3 > 2$-ből $-3 = (-1)\cdot 3 > (-2)2 = -4$, de viszont $-1 > -2, 5 > 2$-ből $-5 = (-1)\cdot 5 < (-2)\cdot 2 = -4$, tehát akkor sem vonhatunk általános következtetéseket, ha az egyik egyenlőtlenség mindkét oldala negatív.

Ha a két egyenlőtlenség három tagja negatív, akkor a *b)* értelmében -1-gyel szorozva az egyenlőtlenségeket és az egyenlőtlenségjeleket az ellenkező értelművel cserélve fel, a már bebizonyított esetekre jutunk. Alkalmazásban azonban legtöbbször csak az *f)* alatt kimondott esetre lesz szükségünk.

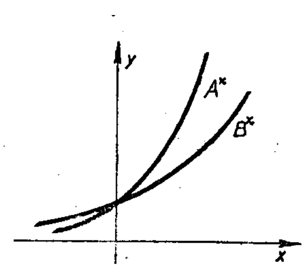
A *c)* pontban ha A pozitív, B negatív, akkor semmit sem mondhatunk, mert pl. $3 > -2$, $3 > -3$, $3 > -4$. Az első esetben $3^2 > (-2)^2$, a másodikban $3^2 = (-3)^2$, a harmadikban $3^2 < (-4)^2$.

Ha A is, B is negatív, akkor $A > B$-ből a *b)* pont szerint $-A < -B$, vagy $-B > -A$ következik s így a *c)* pont szerint $(-B)^n > (-A)^n$. Ebből, ha n páros, azt kapjuk, hogy $B^n > A^n$, ha n páratlan, akkor viszont $-B^n > -A^n$, $A^n > B^n$, tehát egyrészt a *c)* pontban szereplő egyenlőtlenségre egész általánosan csak pozitív A és B mellett következtethetünk, másrészt a további eseteket erre vissza tudjuk vezetni. Teljesen hasonló a helyzet A és B előjelével a *d)* pontban is.

A másik feltevés a *c)* és *d)* pontban az, hogy az n hatványkitevő pozitív egész szám. A következtetés azonban helyes marad, minden pozitív (nem egész) n kitevőre is. Ha $n = 1/q$, q pozitív egész, A és B pozitív és $A > B$, akkor nem lehet [2] $A^{\frac{1}{q}} = B^{\frac{1}{q}}$ ($\sqrt[q]{A} = \sqrt[q]{B}$), mert ekkor $A = B$ volna. Ha $A^{\frac{1}{q}} < B^{\frac{1}{q}}$ állna fenn, akkor q-adik hatványra emelve a *c)* pont szerint következnék, hogy $A < B$, tehát csak az lehet, hogy $A^{\frac{1}{q}} > B^{\frac{1}{q}}$. Ebből *c)* szerint az is következik, hogy ha p pozitív egész szám, akkor

$$A^{\frac{p}{q}} P > B^{\frac{p}{q}}$$

Rajzoljuk most meg az $y = A^x$ és $y = B^x$ görbét.



Minden tört számmal fel nem írható x-hez akármilyen közel találunk tört számot. Ezekben mindig az első görbe van magasabban, mint a második, a görbék pedig összefüggő vonallal rajzolhatók meg, így az x pontban is az első görbe lesz magasabban.

Teljesen hasonlóan okoskodhatunk a d pontban is. [3]

Az *e)* és *f)* pontban azt is felvethetnénk, hogy hogyan változik a helyzet, ha az egyik egyenlőtlenség helyett a két mennyiség egyenlőségét tudjuk. Legyen most pl. $A < B$ és $C = D$, akkor mivel $B > A$ és $BC = BD$ az *a)* pont szerint $BD = BC > AC$, vagyis $AC < BD$. Ha pedig A (és vele együtt B is) pozitív, akkor a *b)* pont szerint $AC < BD$ áll fenn. [4]

Miután két mennyiség A és B közt három kapcsolat állhat, fenn: $A > B$ vagy $A = B$ vagy $A < B$, így gyakran előfordul, hogy ezek közül csak az egyiket akarjuk kizárni. Az $A \neq B$ jelöléssel már ebben a cikkben is találkoztatok. A többi esetben a fennmaradó két lehetőséget szoktuk felírni jelben. Például azt, hogy A nem lehet kisebb B-nél, így írjuk: $A \geq B$, és úgy olvassuk: „A nagyobb B-nél, vagy egyenlő vele”. Akkor az *f)* alatti és a most nyert eredményt (abban A-t és B-t felcserélve) így egyesíthetjük: ha

$$A > B \quad \text{és} \quad C \geq D \quad \text{és} \quad A,\ B,\ C,\ D \quad \text{pozitív},$$

akkor

$$AC > BD.$$

Ugyanezen feltétel mellett

$$A + C > B + D.$$

[2] Pozitív szám tört hatványán (valamilyen gyökén) mindig ennek a pozitív értékét értjük.

[3] Ezzel a 286. feladatnak adtuk megoldását. *Megoldotta:* Kántor S. *Részben:* Rédly E., Zobor E., Zatykó L.

[4] Ezzel a 287. feladatnak adtuk megoldását. *Megoldotta:* Durst E., Kántor S., Kovács L., Reichlin V., Villányi O., Zatykó L., Zobor E. *Részben:* Rédly E.

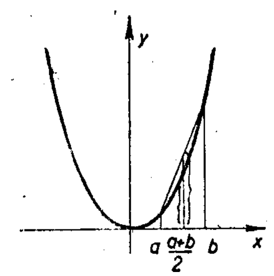
Azt figyeljük meg, hogy ha csak az egyik feltételben is nem szerepel az egyenlőségjel, akkor már a következményben sem állhat egyenlőség. Ha az első egyenlőtlenség helyett is $A \geq B$ állna, akkor már a következményben is $\geq$-t kellene írnunk, de még mindig azzal a megszorítással, hogy a következményben csak akkor áll fenn egyenlőség, ha mind a két feltételben az egyenlőség áll fenn.

3. *Konvex függvények.*

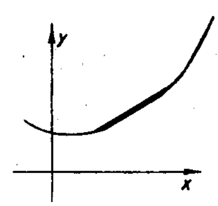
Első közleményünkben bebizonyítottunk egy egyenlőtlenséget a számtani és mértani közép között és alkalmaztuk geometriai szélsőértékfeladatok megoldásában. A 252. feladat II. megoldásában (75–76. old.) egy másik egyenlőtlenséget használtuk geometriai szélsőértékfeladat megoldásában. Ezt az egyenlőtlenséget következő alakjában bizonyítottuk be: ha a, b pozitív számok, akkor a számtani közép négyzete és az ú. n. négyzetes közép közt a következő egyenlőtlenség áll fenn: [5]

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Ezt felfoghatjuk úgy, hogy az $y = x^2$ függvényt ábrázoló görbe egy tulajdonságát fejezi ki. Rajzoljuk fel a görbét és az a és b abszcisszájú pontokat. Ezek ordinátái a^2 és b^2. Így $\frac{a^2+b^2}{2}$ az e két pontot összekötő húr felezőpontjának az ordinátája. E pont abszcisszája $\frac{a+b}{2}$ így $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ a görbe ugyanilyen abszcisszájú pontjának az ordinátája. Az egyenlőtlenség tehát azt fejezi ki, hogy a görbe bármely húrjának a felezőpontja a görbe fölött van. Ez szemléletesen világos is, mert a görbe alulról nézve domború, vagy idegen szóval konvex, s így egy húr minden pontja a görbe fölött van.



Ezek szerint hasonló egyenlőtlenséget nyerhetünk, ha ábrázolunk függvényeket és megnézzük, hogy az őket ábrázoló görbék alulról nézve domborúak-e vagy sem. Ezt ránézésre is könnyen eldönthetjük, ha a görbe elég egyszerű. Legfeljebb akkor merül fel kétség, ha a görbe ilyen alakú:



tehát egy darabja nem is homorú, nem is domború, hanem egyenes. Az ilyen görbéket is nevezhetjük konvexnek (alulról) akkor a konvexség tágabb értelmezéséhez jutunk. Egyezzünk meg abban, hogy a jövőben ha görbék domborúságáról beszélünk, azt mindig alulról nézve gondoljuk. Továbbá, ha röviden konvexet (domborút) mondunk, akkor mindig a szűkebb értelemre gondolunk tehát olyan görbére, amelyben nincs egyenes rész. Ellenkező esetben mindig jelezni fogjuk, hogy tágabb értelemben konvex görbéről van szó.

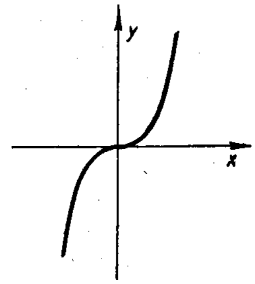
Ha egy függvényt konvex görbe ábrázol, akkor a rövidség kedvéért a függvényt is konvexnek nevezzük. Hasonlóan, ha egy függvény görbéje alulról homorú (konkáv), akkor a függvényt is konkávnak nevezzük. Ha a görbe konvex, ill. konkáv, de előfordulhat benne egyenes rész is, akkor tágabb értelemben konvexnek, ill. tágabb értelemben konkávnak nevezzük és ugyanígy a függvényt is, amelyet ábrázol.

Aki már ábrázolta az x^3 függvényt, emlékszik rá, hogy ennek a görbének az y tengelytől jobbra eső darabja alulról domború, az y tengelytől balra eső része viszont alulról homorú.

---

[5] Valóban a két oldal különbsége

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0$$



Ilyenkor a függvényről is azt mondjuk, hogy a megfelelő szakaszon konvex, ill. konkáv; tehát pl. az x^3 függvény x pozitív értékeire konvex, negatív értékeire pedig konkáv.

311. Ábrázoljuk a

$$\text{(A)} \qquad \sqrt{x},\ -\sqrt{x},\ \ \sqrt[3]{x^2},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x^3},\ 2^x,\ 10^x,\ \lg x (= \overset{10}{\smile}\!\!\log x),$$
$$a^x\ (a \text{ tetszőleges pozitív szám}),\ \sin x,\ \cos x,\ ax+b$$

függvényeket és állapítsuk meg *a rajz alapján,* hogy x mely értékeire konvexek, mely értékeire konkávok ezek a függvények. Milyen különleges tulajdonsága van ezek közül az utolsó kifejezéssel jellemezhető függvényeknek konvexség szempontjából? Van-e más hasonló tulajdonságú függvény is?

*

Nem nagyon megbízható dolog azonban egy függvény tulajdonságait az őt ábrázoló görbéről olvasni le, mert ezt a görbét nem tudjuk pontosan megrajzolni. Csak egyes pontokban számíthatjuk ki a függvényértéket és azoknak az ábrázolásánál is követhetünk el hibát, de különösen az függ egyéni megítélésünktől, és kézügyességünktől, hogy hogyan húzzuk a görbét a kijelölt pontok között. Az ábra magában például már arra sem volna teljesen megbízható, hogy megkeressük az x^3 függvénynél azt a pontot, ahol a görbe (alulról nézve) konvexből átfordul konkávba. Mikor mégis természetesnek vesszük, hogy ez a pont a 0, akkor beleszámítjuk azt is, hogy a 0 pontnak bizonyos központi helyzete van ennél a görbénél. Valóban minden x értékre $(-x)^3 = -x^3$. Ez geometriailag azt jelenti, hogy a görbe x és $-x$ abszcisszájú pontjai egymás tükörképei a 0 pontra nézve. A 0 pontnak ezt a tulajdonságát azonban nem a grafikonról könnyű leolvasni, hanem a függvény matematikai kifejezéséből. Ha megpróbáljátok az $\frac{x}{x^2+1}$ görbét ábrázolni, az a 0 helyen átmegy domborúból homorúba, de ezen kívül negatív x-ekre is, pozitívokra is egy helyen átfordul homorúból domborúba. Ezeknek a fordulópontoknak a helyét már nehéz volna rajzról kielégítő pontossággal leolvasni, mert a közelükben nagyon kevéssé görbül a görbe. Az is előfordulhat, hogy a görbe oly kis darabon hajlik át homorúból domborúba és vissza, hogy azt rajzolás közben észre sem vesszük.

Szükségünk van tehát a grafikus ábrázolásnál biztosabb eszközre ahhoz, hogy eldöntsük egy függvényről, hogy konvex-e egy darabon vagy sem. Az erre kínálkozó út az, hogy keresünk olyan geometriai tulajdonságokat, amik teljesen kifejezik azt, hogy a görbe konvex, de emellett arra is alkalmasak, hogy ábrázolás nélkül, kizárólag a függvénnyel felírhatók legyenek. Sok ilyen tulajdonság van. Ezek közt az egyik legegyszerűbbet már meg is fogalmaztuk éppen akkor, amikor egyenlőtlenségek és a függvénygörbe domborúsága közt találtunk kapcsolatot: (alulról) domború görbének egy, húr végpontjai közti íve teljesen a húr alatt van. Megfordítva is: ha egy görbedarabnak bármely húrja a megfelelő ív felett van, akkor a görbedarab konvex.

Próbáljuk meg ezt a geometriai tulajdonságot a függvény segítségével felírni.

312. Legyen az X tengely két adott pontjának koordinátája x_1 és x_2. Mutassuk meg, hogy bármely köztük levő pont alkalmas pozitív p_1 és p_2 számokkal felírható

$$\text{(B)} \qquad \frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}$$

alakban. Áttekinthetőbbé válik a kifejezés, ha $\frac{p_1}{p_1+p_2}$-t q_1-gyel $\frac{p_2}{p_1+p_2}$-t q_2 vel jelöljük. Ekkor a pont így is írható:

$$\text{(B}'\text{)} \qquad q_1x_1+q_2x_2$$

ahol q_1 és q_2 pozitív és $q_1+q_2=1$.

Hogyan írható fel egy $f(x)$ függvény görbéjének x_1 és x_2 abszcisszájú pontjai közötti húrján (B) ill. (B$'$) abszcisszájú pont ordinátája?

Írjuk le a konvexséget kifejező fenti tulajdonságot a függvényre vonatkozó egyenlőtlenség alakjában.

A nyerendő egyenlőtlenséget nevezik *Jensen-egyenlőtlenségnek.* Ha ebben $q_1 = q_2 \left(=\frac{1}{2}\right)$ ill. $p_1 = p_2$, akkor kapjuk a *szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget.*

313. Hogyan szól a megfelelő egyenlőtlenség-konkáv, tágabb értelemben konvex, ill. tágabb értelemben konkáv függvényekre?

314. A 312. feladat eredményét felhasználva döntsük el, hogy az x^2, $\sqrt{x}$, x^3, $\dfrac{1}{x}$ függvények hol konvexek, hol konkávok.

315. Legyen p_1 és p_2 pozitív szám, $q_1 = \dfrac{p_1}{p_1+p_2}$, $q_2 = \dfrac{p_2}{p_1+p_2}$ (tehát $q_1 + q_2 = 1$). Nevezzük az x_1, x_2 számok p_1 és p_2, ill. q_1 és q_2 súlyokkal súlyozott számtani-, négyzetes-, illetőleg harmonikus közepének sorra a

$$\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2} = q_1x_1+q_1x_2; \qquad \sqrt{\frac{p_1x_1^2+p_2x_2^2}{p_1+p_2}} = \sqrt{q_1x_1^2+q_2x_2^2};$$

$$\frac{p_1+p_2}{\dfrac{p_1}{x_1}+\dfrac{p_2}{x_2}} = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{p_1}{x_1}+\dfrac{p_2}{x_2}}{p_1+p_2}} = \frac{1}{\dfrac{q_1}{x_1}+\dfrac{q_2}{x_2}}$$

kifejezéseket. Bizonyítsuk be, hogy a súlyozott harmonikus közép nem lehet nagyobb, mint a súlyozott számtani közép, ez pedig nem nagyobb a súlyozott négyzetes középnél. Mikor lehetnek egyenlők?

Írjuk fel a megfelelő egyenlőtlenségeket, ha $p_1 = p_2$, $(q_1 = q_2)$.

*

A „súlyozott” jelző a fizikára emlékeztet. Mindjárt meglátjuk, mi indokolja ezt az elnevezést.

316. Az X-tengelynek az x_1 pont és x_2 pont közti szakaszát képzeljük el súlytalan rúdként a koordináta-síkból kivágva; helyezzünk el az x_1 végpontban p_1 súlyt, az x_2 végpontban p_2 súlyt. Az X tengely melyik pontjában lesz a rúd súlypontja?

Helyezzünk el az $y = f(x)$ görbén fekvő (x_1, y_1) pontban p_1, súlyt, az (x_2, y_2) pontban pedig p_2 súlyt. Ha ezeket képzeljük el súlytalan rúddal összekötve, akkor hol lesz most a rúd súlypontja? (Mi lesz az abszcisszája és mi lesz az ordinátája?)

Mit jelent a Jensen-egyenlőtlenség „fizikailag”? Mi van ha p_1 és p_2 súlyok egymással egyenlők?

Ebből a fizikai értelmezésből a Jensen-egyenlőtlenség egy általánosításához jutunk, ha kettő helyett több súlyt helyezünk el a görbe különböző pontjaiban: Három pont súlypontját úgy határozhatjuk meg, hogy az első két pont súlypontjába a két pont egyesített súlyát helyezzük, majd képezzük az így keletkezett pontnak és a harmadik pontnak a súlypontját és ugyanígy vesszük sorra hozzá a további pontokat.

317. Számítsuk ki az (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_k, y_k) pontokban rendre elhelyezett p_1, p_2, $\ldots$, p_k súlyok súlypontjának abszcisszáját és ordinátáját.

Bizonyítsuk be, hogy bármilyen sorrendben is vesszük a pontokat a fenti eljárásban, ugyanazt a súlypontot kapjuk. Ugyanezt a számot kapjuk-e akkor is, ha a pontokat csoportokra választjuk és az egyes csoportok súlypontjainak számítjuk ki a súlypontját?

Bizonyítsuk be a 312. feladat alapján, hogy egy függvény akkor és csak akkor konvex, ha minden x_1, x_2, $\ldots$, x_k-ra és minden pozitív p_1, p_2, $\ldots$, p_k-ra

$$f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_kx_k}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right) \le$$
$$\le \frac{p_1f(x_2)+p_2f(x_2)+\ldots+p_kf(x_k)}{p_1+p_2+\ldots+p_k}$$

vagy minden pozitív q_1, q_2 $\ldots$ q_k-ra melyek összege 1,

$$(\mathrm{D}') \qquad f(q_1x_1+q_2x_2+\ldots g_kx_k) \le q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\ldots+g_kf(x_k).$$

Mikor állhat fenn egyenlőség? (Mi az egyenlőtlenség fizikai értelme?)

Ez a „többtagú (k-tagú) súlyozott Jensen-egyenlőtlenség”. Hogy szól a k-tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség?

Látszólag semmire sem jutottunk. Azzal a céllal fordultunk a geometriához, hogy innen kapjunk segítséget újabb egyenlőtlenségek felkutatásához. Végül a fordított feladatra jutottunk s éppen geometriai tulajdonságok szigorú bizonyításához volt szükségünk egyenlőtlenségek bebizonyítására. Az utolsó feladatban azonban már láttunk példát arra, hogy bizonyos egyenlőtlenségek ismeretében a geometriai szemlélet rávezetett arra, hogy további egyenlőtlenségek helyességére tudjunk következtetni. További feladatunk az lesz, hogy olyan, lehetőleg egyszerű tulajdonságokat keressünk, amelyekből már a függvény konvex voltára következtethetünk, amelyekből tehát a konvexséget kifejező további egyenlőtlenségek helyessége már levezethető.