(1) bal oldala $x \geqq 4$-re van értelmezve. Kipróbálva néhány egész értéket, az $x=5$ gyökre találunk. További gyökök keresésére lényegesen egyszerűsíthető az egyenlet, ha az egyik négyzetgyök helyett új ismeretlent vezetünk be, ugyanis a gyökök alatt elsőfokú kifejezés áll, s így x az új ismeretlennek polinomja lesz. $\sqrt{x-4}$ helyett célszerű új ismeretlent bevezetni, s mivel ennek értéke az $x=5$ helyen 1, így $1+t$-t:

$$\sqrt{x-4}=1+t, \text{ azaz}$$

(2) $$x=t^2+2t+5, \text{ ahol } t \geqq -1,$$

mert a gyök nem negatív. Az egyenlet a következő alakú lesz:

(3) $$\sqrt{2t^2+4t+9}=t^2+t+3.$$

Ebből négyzetre emeléssel és átrendezéssel a

$$t(t^3+2t^2+5t+2)=0$$

egyenlethez jutunk, aminek $t=0$ gyökéhez tartozó x-et már fönt megkaptuk, így a további gyökök a következő egyenletből keresendők:

$$f(t)=t^3+2t^2+5t+2=0,$$

a fenti $t \geqq -1$ korlátozást figyelembe véve. $t \geqq 0$ esetén $f(t)>0$, tehát (4)-nek nincs pozitív gyöke. A $(-1,\ 0)$ intervallumban viszont van, mert $f(-1)=-2<0<2=f(0)$, vagyis f értéke az intervallum két végpontjában ellentétes jelű. Éspedig csak egy gyök van, mert ha $-1 \leqq t_1 < t_2 \leqq 0$, akkor

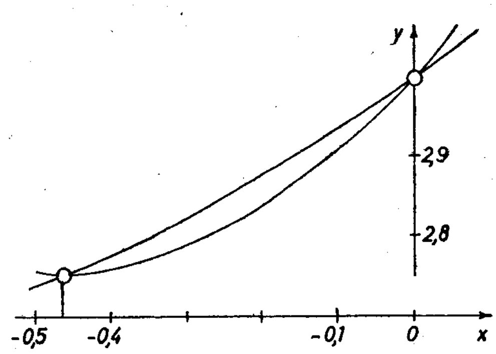
$$\begin{aligned} f(t_2)-f(t_1)&=(t_2^3-t_1^3)+2(t_2^2-t_1^2)+5(t_2-t_1)=\\ &=(t_2-t_1)\big[t_2^2+t_2t_1+t_1^2+2(1+t_2)+2(1+t_1)+1\big]>0, \end{aligned}$$

mert a szögletes zárójelnek mind a 6 tagja pozitív, tehát $f(t)$ az intervallumban szigorúan monoton növekvő.

Az $f(-1)=-2$, $f(0)=2$ értékekre támaszkodva és lineáris interpolációt alkalmazva a $t_1=-0{,}5$ közelítéssel próbálkozunk: $f(-0{,}5)=-0{,}125$, eszerint a gyök nagyobb, mint t_1. Viszont $t_2=-0{,}4$-et véve $f(-0{,}4)=0{,}256>0$, a gyök kisebb, mint t_2. Ismét lineáris interpolációval a két utóbbi értékre támaszkodva $t_2=-0{,}5+0{,}125/0{,}381 \approx -0{,}467$ kínálkozik közelítésnek, éspedig jónak bizonyul: $f(-0{,}467)=0{,}00067$, tehát (4) gyökére $t>-0{,}467$.

Innen (2) alapján $x>4{,}284\ldots$, ugyanis az $x=(t+1)^2+4$ átalakítás szerint $t>-1$ esetén x monoton növekvő függvénye t-nek.

x keresett értéke 10^{-2} értékű jegyének tisztázására tekintsük még az $f(-0,466\ldots=f(-7/15)$ értéket: $2/3375>0$, tehát $t<-7/15$, és $t=-7/15$ esetén $x=3856/900<4{,}285$. Így a kívánt pontossággal $x=4{,}28$, ami valóban kielégíti (1)-et, és további gyök nincs.



Megjegyzés. Legyen (3)-ban

$$\sqrt{2t^2+4t+9}=y.$$

Ezt átrendezve a kapcsolatot kielégítő értékpárokat a t, y koordináta–rendszerben az

$$\frac{y^2}{7}-\frac{(t+1)^2}{7/2}=1$$

egyenletű görbe $y \geqq 0$ feltételt kielégítő pontjai ábrázolják. Ez egy $(-1,\ 0)$ középpontú és az y tengellyel párhuzamos főtengelyű hiperbola felső ága.

(3) jobb oldalának képe pedig az

$$y=t^2+t+3=\left(t+\frac{1}{2}^{2}\right)+\frac{11}{4}$$

egyenletű parabola. A két görbe az ábra szerint $t=0$-nál, továbbá $-1/2$ és 0 között metszi egymást.