I. megoldás. Mindegyik nevező pozitív, mert tényezőik pozitívok, így (1)-et a közös nevező 2-szeresével szorozva, vele ekvivalens állítást kapunk:

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma \leq 6 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \tag{2}$$

ezt bizonyítjuk. $\gamma=180^{\circ}-(\alpha+\beta)$ alapján $\sin \gamma=\sin (\alpha+\beta)=\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta$, ezért a jobb oldal így alakítható:

$$\begin{gathered}
6 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta+6 \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta=3(\sin^2 \alpha \sin 2\beta+\sin^2 \beta \sin 2\alpha)= \\
=\frac{3}{2}\big[(1-\cos 2\alpha) \sin 2\beta+(1-\cos 2\beta) \sin 2\alpha\big]=\frac{3}{2}\big[\sin 2\alpha+\sin 2\beta-\sin (2\alpha+2\beta)\big]= \\
=\frac{3}{2}\big[\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin (360^{\circ}-2\alpha-2\beta)\big].
\end{gathered}$$

Eszerint a zárójel harmadik tagja sin 2γ, tehát benne (2) bal oldala áll, így jobb és bal oldal aránya $3:2$.

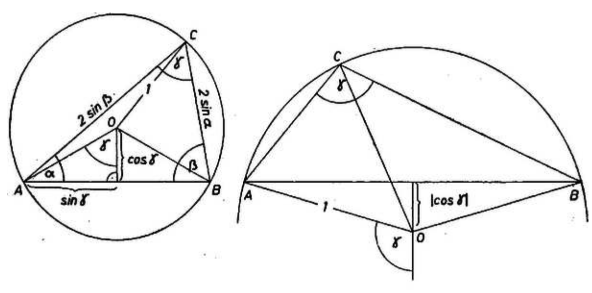
Minthogy pedig a jobb oldal – mint láttuk – pozitív, (2) helyes, és vele (1) is. Az állításnál többet bizonyítottunk be, ti. azt, hogy mindkét esetben határozottan a $<$ jel érvényes, valamint hogy (1) bal oldalának értéke 2.

Martoni Viktor (Veszprém, Lovassy L. gimn. I. o. t.)

II. megoldás. A fentiekhez hasonlóan adódó

$$\sin \alpha \cos \alpha+\sin \beta \cos \beta+\sin \gamma \cos \gamma \leq 3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \tag{3}$$

egyenlőtlenséget igazoljuk. Jelöljük az ABC háromszög köré írt kör középpontját O-val, válasszuk a sugarát mértékegységnek, ekkor oldalainak hossza $BC=2\sin\alpha$, $CA=2\sin\beta$, $AB=2\sin\gamma$. Így (3) bal oldalának egyes tagjai a BOC, COA, AOB háromszög területét adják, mert ezek O-ból húzott magassága $\cos\alpha$, $\cos\beta$, ill. $\cos\gamma$. Ha γ a legnagyobb szög, akkor az AOB háromszög területét aszerint kapjuk pozitív vagy negatív előjellel, vagy lesz 0, amint γ hegyesszög, tompaszög vagy derékszög, így a bal oldal minden esetben a háromszög területét adja.



Ezt számíthatjuk úgy is, mint két oldal hossza és közbezárt szögük szinusza szorzatának fele, és a következő azonosságot kapjuk:

$$\begin{gathered}
\sin \alpha \cos \alpha+\sin \beta \cos \beta+\sin \gamma \cos \gamma= \\
=\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \beta \cdot 2 \sin \gamma \cdot \sin \alpha=2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.
\end{gathered}$$

Végül a jobb oldalon 2 helyett 3-at írva ezt az oldalt növeljük, mert a területet írtuk fel pozitív előjellel, tehát (3) helyes, úgyszintén (1) is.