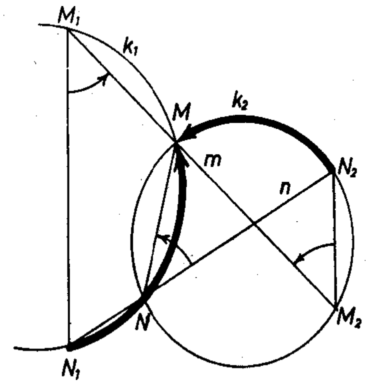
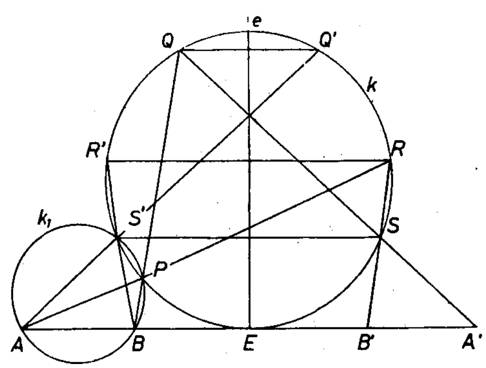
I. megoldás. Bizonyításunk elvégzéséhez szükségünk lesz a következő egyszerű tényre: ha a k_1 és k_2 körök egymást az M, N pontokban metszik, és ezeken tetszőleges m, ill., n egyeneseket fektetünk át, amelyek a köröket másodszor rendre az M_1, M_2, ill., N_1, N_2 pontokban metszik, akkor $M_1N_1 \| M_2N_2$ (1. ábra)[1].



1. ábra

Valóban, az $N_1M_1M\sphericalangle = N_2NM\sphericalangle = N_2M_2M\sphericalangle$, tehát az N_1M_1, N_2M_2 egyeneseket azonos forgatás viszi át az M_1M_2 egyenesbe, így párhuzamosak.

Rátérünk a bizonyításra. Tükrözzük Q-t a feladatban szereplő k körnek az E ponton átmenő e átmérőjére, a kapott pontot jelöljük Q'-vel (2. ábra).



2. ábra

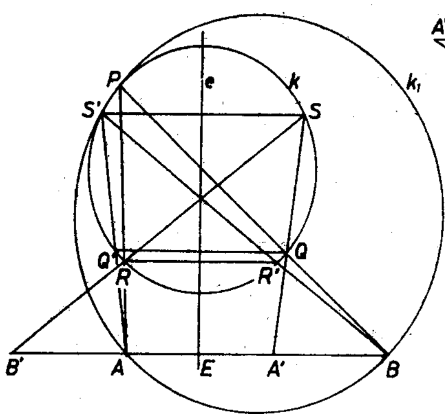
Messe az AQ' egyenes k-t az S' pontban: ez nyilván az S pont e-re vonatkozó tükörképe. Megmutatjuk, hogy az A, B, P, S' pontok egy k_1 körön helyezkednek el. Ha S' és P azonosak, ez nyilvánvaló. Ha különbözők, legyen k_1 a B, P, S' pontokon átmenő kör, és messe k_1-et a $Q'S'$ egyenes A^*-ban. Fenti megjegyzésünk alapján $QQ' \| BA^*$, és mivel $QQ' \| EB$, így A^* a BE egyenesen is rajta van, tehát azonos a BE és $Q'S'$ egyenesek metszéspontjával, A-val. A tehát rajta van k_1-en. Messe a BS' egyenes k-t másodszor R'-ben. Ugyancsak a fenti megjegyzés alapján $AB \| R'R$, tehát R' az R pont e-re vonatkozó tükörképe. Emiatt az $R'S'$ egyenes e-re vonatkozó tükörképe az RS egyenes, és ez az e-re szimmetrikus AE egyenesből valóban a B pont E-re szimmetrikus B' párját metszi ki, amit bizonyítanunk kellett.

(Tusnády Gábor)

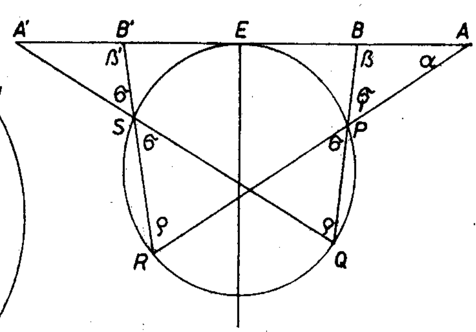
Megjegyzések. 1. Bizonyításunk független attól, hogy Q és R' közül melyik van közelebb az AA' egyeneshez. Nem használtuk ki sem az $EB < EA$, $BP < BQ$ nagyságviszonyokat, sem azt, hogy B ugyanazon oldalán van E-nek, mint A, tehát a szerkesztés e korlátozások nélkül érvényes. Ajánljuk az olvasóknak ezek átgondolását.

2. Hasonlóan szerkeszthető (és a szerkesztés helyessége hasonlóan bizonyítható) a k kör e átmérőjének tetszőleges E pontjában emelt merőleges egyenes tetszőleges B pontjának E-re vonatkozó B' tükörképe, ha adott az egyenesen az E-re szimmetrikus A, A' pontpár (3. ábra). Ha a szerkesztés vagy a bizonyítás során két pont azonosnak adódik a k körön, az általuk meghatározott egyenesnek a k kör e közös ponthoz tartozó érintőjét tekintjük. Ilyen esetben a bevezetőben megoldott segédfeladatban is meg kell engednünk, hogy az m, n egyenesek a k_1, k_2 körök érintői legyenek. *(T. G.)*

[1] Lásd: *Czapáry Endre-Horvay Katalin-Reiman István-dr. Soós Paula:* Geometriai feladatok gyűjteménye, Tankönyvkiadó, Budapest, 1964, 872. feladat, 55. o.



3. ábra



4. ábra

Sokan számítással bizonyították az állítást. Ilyen a következő

II. megoldás. Használjuk a 4. ábra szögjelöléseit. Az egyenlően jelölt szögek nyilvánvalóan egyenlők. A $B'A'S$ háromszögből a színusz tétel alapján

$$A'B' = A'S \cdot \frac{\sin\sigma}{\sin\beta'} = A'S \cdot \frac{\sin APB\sphericalangle}{\sin AB'R\sphericalangle}. \tag{1}$$

Alkalmazzuk a körhöz húzott szelő és érintő tételét az A', majd az A pontra, továbbá a színusz tételt az ABP és $AB'R$ háromszögnek (1)-ben szereplő alkotórészére:

$$A'S = \frac{A'E^2}{A'Q} = \frac{AE^2}{A'Q} = \frac{AP\cdot AR}{A'Q},$$

$$\sin APB\sphericalangle = \frac{AB\sin ABP\sphericalangle}{AP} = \frac{AB\sin A'BQ\sphericalangle}{AP},$$

$$\frac{1}{\sin AB'R\sphericalangle} = \frac{B'A}{AR\sin ARB'\sphericalangle} = \frac{B'A}{AR\sin A'QB\sphericalangle}.$$

Ezeket összeszorozva

$$A'B' = \frac{AB\cdot B'A}{\dfrac{A'Q\sin A'QB\sphericalangle}{\sin A'BQ\sphericalangle}},$$

és felismerjük, hogy a nevezőben az $A'QB$ háromszög BA' oldala áll. Átrendezéssel, majd mindkét oldalhoz 1-et adva

$$\frac{A'B'}{B'A} = \frac{AB}{BA'}, \qquad \frac{A'A}{B'A} = \frac{AA'}{BA'},$$

eszerint $B'A = BA'$, és ez az állítást igazolja.

Michaletzky György (Budapest, Piarista Gimn., III. o. t.)