I. Megoldás. Képezzük külön-külön a 2-es alap, majd a 6-os, 7-es, 8-as alapok 1, 2, …, 10 kitevőjű hatványának 11-gyel való osztásában fellépő (11-nél kisebb, nem negatív) maradékot (lásd a táblázatot). Ebben felhasználjuk, hogy ha egy szorzatban a tényezőket olyan számokkal helyettesítjük, melyek 11-gyel osztva ugyanannyi maradékot adnak, mint az eredetiek, akkor az új szorzat is annyi maradékot ad 11-gyel osztva, mint az eredeti. Valóban, ha az $a \cdot b$ szorzatban a helyére a_1-et, b helyére b_1-et írunk, ahol a és a_1, ill. b és b_1 11-gyel osztva ugyanazt a maradékot adják, azaz $a - a_1$ és $b - b_1$ osztható 11-gyel, akkor $a_1 b_1$ és ab maradéka is egyenlő, azaz $ab - a_1 b_1$ is osztható 11-gyel:

$$ab - a_1 b_1 = ab - a_1 b + a_1 b - a_1 b_1 = (a - a_1)b + a_1(b - b_1),$$

mert mindkét tag egyik-egyik tényezője osztható vele.

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	esetén
2^n maradéka	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1	
6^n maradéka	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1	
7^n maradéka	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1	
8^n maradéka	8	9	6	4	10	3	2	5	7	1	

Eszerint mind a négy alap 10. hatványának 1 a maradéka. Ez fölöslegessé teszi a további kitevők vizsgálatát, mert a maradékok sorozata mindegyik alap esetében 10-esével szakaszosan ismétlődik. Valóban, a-val a négy alap bármelyikét jelölve

$$a^{10} = 11B + 1,$$

tehát ha a^n maradéka r_2, azaz

$$a^n = 11C + r_2,$$

akkor

$$a^{n+10} = a^n \cdot a^{10} = (11C + r_2)(11B + 1) = 11D + r_2,$$

ahol

$$D = 11BC + Br_2 + C,$$

és ez állításunkat igazolja.

Eszerint $\alpha = 10m$ (ahol $0 < m < k$) és bármely szóba jövő k szám esetén az (1) kifejezésben mindegyik kitevő $10n$ alakú ($n > 0$), tehát mindegyik hatvány maradéka 1, és a kifejezés maradéka $1 + 1 - 1 - 1 = 0$. Ezzel azt kaptuk, hogy (1) helyett elég vizsgálni a

$$\left(8^\alpha - 7^{10-\alpha}\right) + \left(6^{10-\alpha} - 2^\alpha\right) \tag{2}$$

kifejezést, ahol $0 < \alpha < 10$.

Táblázatunk szerint a 6-os alap maradékainak sorozata fordított sorrendben megegyezik a 2-es alap maradékainak sorozatával, emiatt a $6^{10-\alpha} - 2^\alpha$ különbség 11-gyel való osztásában a maradék mindig 0. Ugyanezek állnak a 7-es és 8-as alap maradékainak sorozatára, ill. a (2)-beli első zárójeles kifejezésre, így a (2) kifejezés – és vele (1) is – minden szóba jövő esetben 0 maradékot ad, osztható 11-gyel.

II. megoldás. Figyeljük meg, hogy egy-egy kisebbítendő és kivonandó alapjának szorzata 1 maradékot ad 11-gyel osztva:

$$6 \cdot 2 = 11 + 1, \qquad 8 \cdot 7 = 55 + 1.$$

Megmutatjuk, hogy ennek lényeges szerepe van a feladat állításának helyes voltában; általában, ha $a \cdot b - 1$ osztható 11-gyel, akkor

$$D = a^{10k+\alpha} - b^{10k-\alpha}$$

osztható 11-gyel, így $8^{10k+\alpha} - 7^{10k-\alpha}$ és $6^{10k+\alpha} - 2^{10k-\alpha}$ is, tehát a feladatban szereplő kifejezés is osztható 11-gyel.

Valóban,

$$D = a^{10k+\alpha} - b^{10k-\alpha} = a^{10k+\alpha} - a^\alpha b^{10k} + a^\alpha b^{10k} - b^{10k-\alpha} = a^\alpha \left[\left(a^{10}\right)^k - \left(b^{10}\right)^k\right] + b^{10k-\alpha}\left[(ab)^\alpha - 1\right],$$

és itt az első tag osztható a $c = a^{10} - b^{10}$, a második az $ab - 1$ különbséggel. Feltételünk szerint az utóbbi osztható 11-gyel, azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy c osztható 11-gyel.

A feltételből következik, hogy sem a, sem b nem osztható 11-gyel, különben ab volna vele osztható, nem pedig $ab - 1$. c így alakítható:

$$c = \left(a^{10} - 1\right) - \left(b^{10} - 1\right),$$

elég tehát megmutatnunk, hogy ha egy d egész szám nem osztható 11-gyel, akkor $d^{10} - 1$ osztható vele. Láttuk az I. megoldásban, hogy ezt elég a $d = 1, 2, \ldots, 10$ számokra megmutatni. Ez $d = 1$-re nyilvánvaló, a $d = 2, 6, 7, 8$ számokra fent láttuk; a $d = 3, 4, 5, 9, 10$ számokból előállítjuk rendre d^2, d^3, d^5, d^{10} maradékát, menet közben az egyes hatványokat mindjárt helyettesítve a 11-gyel való osztásukból adódó maradékkal:

$d=$	3	4	5	9	10	esetén
d^2 maradéka	9	5	3	4	1	
d^3 maradéka	5	9	4	3	10	
d^5 maradéka	1	1	1	1	10	
d^{10} maradéka	1	1	1	1	1	

Ezzel bizonyításunkat befejeztük.

Megjegyzés. Elkerülhettük volna az utolsó lépés numerikus számolását *Fermat* tételének alkalmazásával, mely szerint ha p törzsszám és a nem osztható p-vel, akkor $a^{p-1}-1$ osztható p-vel.