I. $f(x)$ három ismeretlen együtthatójának meghatározására a 3 követelményből egyenletrendszert kapunk.

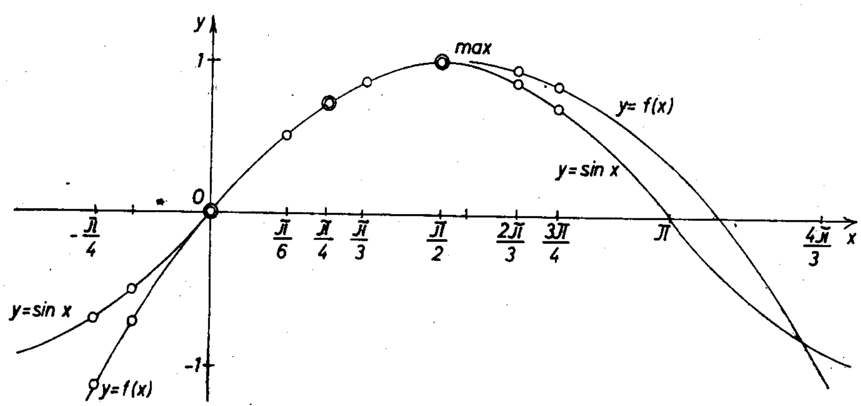
$$
\begin{aligned}
f(0) &= c && = \sin 0 = 0, \\
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= c + \frac{\pi}{4}\, b + \frac{\pi^2}{16}\, a = \sin\frac{\pi}{4} &&= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= c + \frac{\pi}{2}\, b + \frac{\pi^2}{4}\, a = \sin\frac{\pi}{2} &&= 1.
\end{aligned}
$$

Ezt a szokott módon megoldva

$$
a = -\frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{\pi^2} \approx -0{,}336, \qquad b = \frac{4\sqrt{2}-2}{\pi} \approx 1{,}164, \qquad c = 0,
$$

és így a keresett függvény (1. ábra):

$$
f(x) = \frac{4\sqrt{2}-2}{\pi}\, x - \frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)}{\pi^2}\, x^2.
$$



1. ábra

Az $f(x) - \sin x$ különbség értékét az előírt helyek növekvő sorrendjében a táblázat tartalmazza. Összehasonlításul beiktattuk az előírt megegyezési helyeket is. Látjuk, hogy az utóbbi 3 hely között a kérdéses eltérés abszolút értéke aránylag kicsi, a balra és jobbra fölvett 2–2 helyen viszont nagyobb.

x	$f(x) - \sin x$	közelítő értéke
$-\pi/4$	$1-\sqrt{2}$	$-0{,}414$
$-\pi/6$	$\left(19-16\sqrt{2}\right)/18$	$-0{,}202$
0	0	0
$\pi/6$	$\left(8\sqrt{2}-11\right)/18$	$+0{,}017$
$\pi/4$	0	0
$\pi/3$	$\left(8\sqrt{2}+4-9\sqrt{3}\right)/18$	$-0{,}015$
$\pi/2$	0	0
$2\pi/3$	$\left(40-16\sqrt{2}-9\sqrt{3}\right)/18$	$+0{,}099$
$3\pi/4$	$3-2\sqrt{2}$	$+0{,}172$

II. Hasonlóan a keresett $g(x)$ függvényre a $g(0) = 0$ előírás folytán mindjárt $d = 0$, a további 3 helyből

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\pi}{12}\, c + \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 b + \left(\frac{\pi}{12}\right)^3 a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \\
g\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\pi}{6}\, c + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 b + \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 a = \frac{1}{2}, \\
g\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4}\, c + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 b + \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 a = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

Az első egyenlet 8-szorosából a másodikat, majd ismét az elsőnek a 27-szereséből a harmadikat kivonva az a-t tartalmazó tagok kiesnek:

$$\frac{\pi}{2}\,c + \frac{\pi^2}{36}\,b = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - \frac{1}{2},$$

$$2\pi c + \frac{\pi^2}{8}\,b = \frac{27\sqrt{6} - 29\sqrt{2}}{4}.$$

Innen

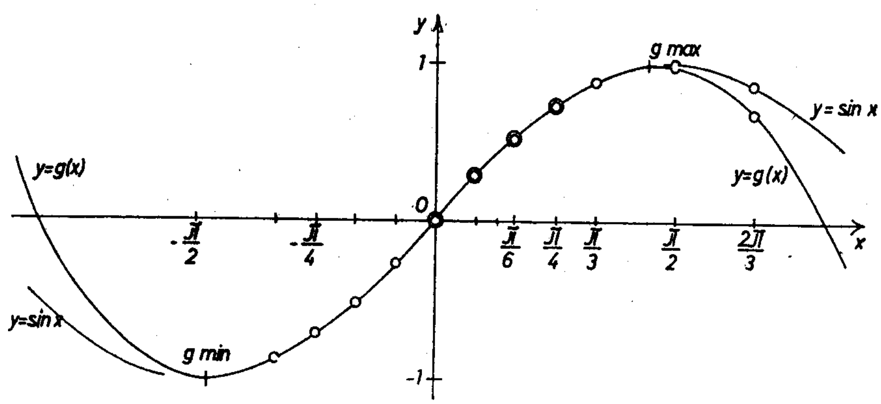
$$c = \frac{1}{\pi}\left(9\sqrt{6} - 9 - 7\sqrt{2}\right) \approx 1{,}0014, \qquad b = \frac{18}{\pi^2}\left(8 + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{6}\right) \approx -0{,}0088,$$

ezekkel a fentiekből

$$a = \frac{72}{\pi^3}\left(3\sqrt{6} - \sqrt{2} - 6\right) \approx -0{,}1527,$$

amikkel $g(x)$ így is írható (2. ábra a 114. oldalon):

$$g(x) = \left(9\sqrt{6} - 9 - 7\sqrt{2}\right)\frac{x}{\pi} + 18\left(8 + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{6}\right)\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 + 72\left(3\sqrt{6} - \sqrt{2} - 6\right)\left(\frac{x}{\pi}\right)^3.$$



2. ábra

Ezekkel a $g(x) - \sin x$ különbség értéke az előírt, a $g(x)$ képezésében felhasznált helyeken és még két helyen e helyek növekedő rendjében:

x		$g(x) - \sin x$	közelítő értéke
$-\pi/2$	$-90°$	$26\sqrt{2} + 95{,}5 - 54\sqrt{6}$	$-0{,}003$
$-\pi/3$	$-60°$	$35 + 11\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 21\sqrt{6}$	$-0{,}017$
$-\pi/4$	$-45°$	$\frac{9}{4}\left(8 + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{6}\right)$	$-0{,}011$
$-\pi/6$	$-30°$	$8 + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{6}$	$-0{,}0048$
$-\pi/12$	$-15°$	$\frac{1}{4}\left(8 + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{6}\right)$	$-0{,}0012$
0	$0°$	0	0
$\pi/12$	$+15°$	0	0
$0{,}4$	$22{,}92°$		$-0{,}000\,05^*$
$\pi/6$	$30°$	0	0
$\pi/4$	$45°$	0	0
$\pi/3$	$60°$	$\sqrt{6} + \sqrt{2} - 3 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-0{,}0023$
$\pi/2$	$90°$	$9\sqrt{6} + \sqrt{2} - 23{,}5$	$-0{,}0404$
$2\pi/3$	$120°$	$30\sqrt{6} - 70 - 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-0{,}21$

A talált különbségek általában kisebbek, mint $f(x)$ esetében.

Katona Viktor (Heves, Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A *-gal jelölt értéket a, b, c nagyobb pontosságú közelítő értékei alapján számítottuk.

2. A $g(x)=x\cdot 1{,}0014-x^2\cdot 0{,}0088-x^3\cdot 0{,}1527$ közelítő függvény elég jó közelítése a többek által ismert

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\dots$$

sorfejtés első két tagjának is.