A verseny 1949. október 29-én Budapesten, Szegeden, Debrecenben és Pécsett egyidőben folyt le. A versenyen 1949-ben érettségizettek és középiskolás diákok vehettek részt. A résztvevők s a beadott dolgozatok száma: Budapesten 184 versenyző, 104 dolgozat; Szegeden 23 versenyző, 12 dolgozat; Debrecenben 23 versenyző, 8 dolgozat; Pécsett 29 versenyző, 16 dolgozat; összesen 259 versenyző, 140 dolgozat. A verseny feladatai a következők voltak:

1. *Bizonyítandó, hogy minden 180°-nál kisebb, pozitív a szögre*

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha>0$$

2. *Egy egyenlőszárú háromszög alapján felvett P pontból a szárakkal párhuzamosakat húzunk, ezek a szárakat Q és R pontban metszik. Bizonyítandó, hogy a P pontnak a QR egyenesre vonatkozó tükörképe az egyenlőszárú háromszög köré írt kör kerületén van.*

3. *Melyek azok a természetes számok, amelyek nem írhatók fel több egymást követő természetes szám összegeként?*

A *Bolyai János Matematikai Társulat* elnöksége által kiküldött versenybizottság elnöke Alexits György, tagjai Kárteszi Ferenc, Surányi János és Hajós György előadó. E bizottság 1949. november 14-én tartott ülésén (kimentette magát Alexits György) egyhangúan a következő jelentést fogadta el:

„A bizottság örömmel látja a résztvevők s a pályamunkák szokatlanul nagy számát. Sajnálattal állapítja viszont meg, hogy egy versenyző sem adott be érdemleges munkát mindhárom feladatra. Ez a tény s a szóbajövő dolgozatok részletesebb vizsgálata indította a bizottságot arra az elhatározásra, hogy az első Kürschák-díjat nem adja ki.

Két-két feladat megoldását öt pályamunka tartalmazza. Első helyen kell említeni ezek közül Korányi Ádám és Róna Péter dolgozatát. Korányi Ádám a szegedi Klauzál gimnázium IV. oszt. tanulója, Iványi János tanár tanítványa; dolgozatában a második feladattal nem foglalkozik, viszont a harmadik feladatra kiemelkedően szép és tömör megoldást ad. Róna Péter a budapesti evangélikus gimnáziumban érettségizett és Léviusz Ernő tanár tanítványa volt; a harmadik feladat megoldásánál avval hibázott, hogy természetes számok helyett egész számokkal foglalkozott, másik két megoldása jó, bár a második feladatra adott megoldása kissé terjengős. A bizottság a második Kürschák-díjat Korányi Ádámnak és Róna Péternek ítélte oda, s dolgozatukat 300–300 forinttal jutalmazza.

Nem sokban marad értékelésben az említettek mögött Czipszer János, Fried Ervin és Bognár János. Czipszer János 1949-ben érettségizett, az első feladat számítását elhibázta, a másik két feladatot jól oldotta meg. Fried Ervin 1949-ben érettségizett, az első két feladatot jól oldotta meg, a harmadikra hibás állításokból kiindulva igyekezett megoldást találni. Bognár János IV. oszt. gimnáziumi tanuló az első és harmadik feladatot oldotta meg, a másodikkal nem foglalkozott. A bizottság e három versenyzőt, Czipszer Jánost, Fried Ervint és Bognár Jánost dicséretben részesíti.

Az első díj ki nem adása lehetővé teszi, hogy a dicséretben részesült dolgozatok szerzői is jutalmat kapjanak. A bizottság Fried Ervin és Bognár János dolgozatát 200–200 forinttal jutalmazza. Czipszer János az előző évi tanulóverseny első díját nyerte, s így a verseny szabályzata szerint jutalmat nem kaphatott.”

A díjakat a Társulat 1949. év november hó 19-én tartott előadó ülésén osztotta ki Fejér Lipót professzor, a Társulat díszelnöke, majd Hajós György ismertette a feladatok különböző megoldásait és általánosításait. Az alábbiakban az 1. és 3. feladat megoldásait mutatjuk be. A 2. feladat megoldására a következő számunkban térünk vissza.

1. feladat.

I. megoldás: [Alakítsuk át a vizsgálandó kifejezést][1]

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\qquad \sin 3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha,$$

így

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha&=\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha-\frac{\sin^3\alpha}{3}=\\=\frac{\sin\alpha}{3}(3+3\cos\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)&=\frac{\sin\alpha}{3}(2+3\cos\alpha+4\cos^2\alpha)=\\&=\frac{\sin\alpha}{3}\Big\{(1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha)+(1+\cos\alpha)+3\cos^2\alpha\Big\}.\end{aligned}$$

De $\frac{\sin\alpha}{3}>0$, mert $0^\circ<\alpha<180^\circ$; $1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha=(1+\cos\alpha)^2>0$; $1+\cos\alpha>0$, [mert $\cos\alpha>-1$] és $3\cos^2\alpha>0$; így az egész összeg pozitív.

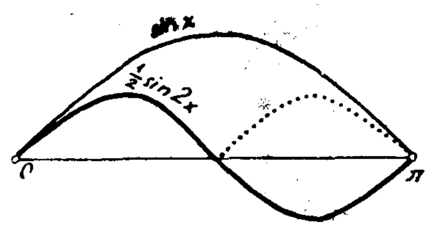
$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha==\frac{\sin\alpha}{3}\Big\{(1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha)+(1+\cos\alpha)3\cos^2\alpha\Big\}>0.$$

Fried Ervin.

[1] A versenyzők megoldásait lehetőleg szószerint közöljük. A szerkesztőség kiegészítéseit azögletes zárójellel választjuk el az eredeti szövegtől.

II. megoldás: Kevesebb számolással is célhoz érünk, ha az egyes tagokat grafikusan ábrázoljuk. (Jelöljük a szöget x-szel és számítsuk ívmértékben.)

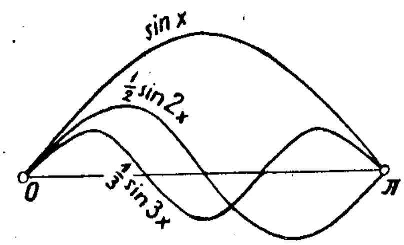
$\frac{1}{2}\sin 2x$ görbéjét úgy kapjuk a $\sin x$-éből, hogy azt a kezdőpontra, mint hasonlósági középpontra nézve felére kicsinyítjük, vagyis a kezdőpontból kiinduló húrok középpontjaiból tevődik össze a görbe első íve; a második ív pedig ugyanolyan, mint az előző, de a tengely alatt.



Ha visszafordítjuk a tengely fölé a negatív ívet, akkor ismét a $\sin x$ felére kicsinyített képét kapjuk, most a $(0,\pi)$ intervallum végpontjából mint hasonlósági középpontból lekicsinyítve. Ez a visszafordított ív is $\sin x$ görbéje alatt marad, tehát

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x > 0 \qquad \text{ha} \qquad 0 < x < \pi$$

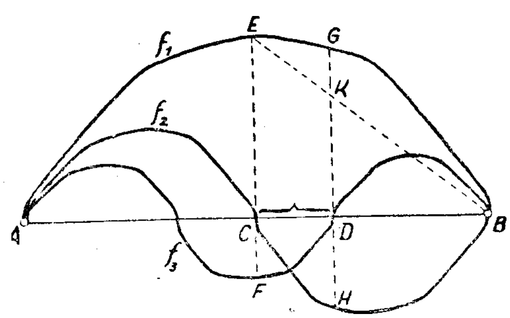
Ha ehhez hozzávesszük $\frac{1}{3}\sin 3x$-et, az csak $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ szakaszon kisebbíti az összeget. Ezen a szakaszon $\sin x \leq \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}/2$.



A kivonandók abszolút értéke viszont nem lehet több, mint 1/2 ill. 1/3 és ezek összege $5/6 < \sqrt{3}/2$, mert az előbbi négyzete 25/36, az utóbbié 3/4=27/36. Így

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < \pi.$$

III. Megoldás: Még itt is felhasználtuk a $\sin x$ függvény értékét néhány helyen, pedig elég a görbéjének néhány tisztán geometriai tulajdonságát felhasználni. Azt, hogy a görbe felülről nézve domború, más szóval, hogy bárhol húzva egy húrt, a görbe fölötte fekszik. Azt, hogy a szakasz középmerőlegesére szimmetrikus a görbe és hogy a szakasz végpontjaiban eléri a tengelyt.



Legyen egy tetszőleges ilyen görbénk a tengely egy AB szakaszán. Ez annyiban hasonlít a $\sin x$-ére, hogy a szakasz C középpontjáig emelkedik, onnan viszont süllyed. (Részben futhat párhuzamosan is a tengellyel.) Kicsinyítsük a felére és a harmadára és folytassuk úgy a kapott görbéket, hogy váltakozva a tengely alatt és fölött illesztünk hozzá az elsővel egybevágó íveket.

Megmutatjuk, hogy az így kapott három görbe ordinátáinak összege az egész szakaszon pozitív.

Hogy könnyebben tudjunk beszélni, nevezzük a három görbéhez tartozó függvényt $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$-nek. A domborúság miatt a kicsinyített ívek itt is az eredeti alatt feküsznek, s így könnyen látható, hogy

$$f_1(x) + f_2(x) > 0 \quad \text{és} \quad f_1(x) + f_3(x) > 0.$$

Csak azon a szakaszon kell alaposabban megnéznünk függvényeinket, ahol f_2 is, f_3 is negatív, tehát a CD szakaszon (a középponttól a szakasz $^2/_3$-áig). Ezen a szakaszon a kisebbítendő legkisebb értéke DG. f_3 legnagyobb levonandó értéke $CF = \frac{1}{3}CE$, f_2 legnagyobb levonandó értéke pedig DH. DH feleakkora, mint f_1 értéke a szakasz harmadrészén, tehát ugyancsak feleakkora mint f_1 értéke a szakasz kétharmadán, azaz $DH = \frac{1}{2}DG$. Kössük össze B-t és E-t és jelöljük BE és DG metszéspontját K-val. Mivel $BD = \frac{2}{3}BC$, így egyszersmind $DK = \frac{2}{3}CE$. Mivel CF a CE egyharmada, így egyben fele DK-nak. A két levonandó tehát nem lehet több, mint DG fele és DK fele, s így együtt kevesebb, mint DG, ami a kisebbítendő legkisebb értéke. Ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

Megemlítjük, hogy a feladat speciális esete egy általánosabb tételnek. Fejér Lipót vette észre, hogy

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx > 0, \text{ ha } 0 < x < \pi$$

bármely pozitív egész n-re. Akik egyetemen fognak matematikát tanulni, be fogják ezt is bizonyítani és fontos alkalmazását is fogják látni.

3. feladat.

I. megoldás. Azok az [egynél nagyobb] számok, amelyek maguk páratlanok, vagy páratlan osztójuk van, felírhatók egymásután következő számok összegeként. A többi – vagyis 2 hatványai – pedig nem.

A $(2k+1)n$ szám, amelynek van páratlan osztója, felírható az $n-k$-tól $n+k$-ig terjedő számok összegeként. Ha itt $k > n$ és így negatív számmal kezdődne a sor, a negatív tagokat és a velük abszolút értékben megegyező pozitív tagokat elhagyva kaphatunk természetes számokból álló sort. [A maradó sor legalább két számból áll, mert az eredeti számsor páratlan számú tagbál álló és középen a pozitív n szám áll. Páratlan az elhagyott tagok száma is, mert ugyanannyi negatív tagot hagytunk el, mint pozitívot és még a 0-át. Mivel az utóbbi számok kevesebben vannak, mint az előbbiek és pedig páros számmal, tehát legalább 2-vel, így legalább két pozitív tag marad meg.]

Ha 2 hatványait fel lehet írni egymásután következő számok összegeként, feltétlenül páros számú tag összege lenne, mert a számtani haladvány összege osztható tagjainak számával, [ha ez páratlan szám], a mi számunknak pedig nincs páratlan osztója. Ha pedig a tagok száma páros, akkor az első és utolsó tag közül az egyik páros, a másik páratlan. Összegük tehát páratlan. A haladvány összege pedig osztható első és utolsó tagjának összegével [ha ez páratlan szám]. Tehát így azt kaptuk, hogy a számnak van páratlan osztója. Az a feltevésünk tehát, hogy 2 valamelyik hatványát fel lehet írni egymásután következő számok összegeként ellentmondásra vezet.

Korányi Ádám.

II. megoldás. Ha egy N szám megfelel a feladat feltételeinek, akkor ilyen alakú:

$$N = a + (a+1) + \ldots + (a+n-1) = \frac{n(2a+n-1)}{2},$$

azaz

$$2N = n(2a+n-1), \quad \text{és itt} \quad n < 2a+n-1.$$

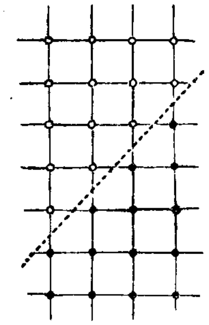
Legyen N most egy tetszőleges pozitív egész szám és kétszenesének egy tényezőkre bontása $2N = p \cdot q$, jelentse p a kisebbik tényezőt. Milyen legyen ez a felbontás, hogy a fenti alakban lehessen íni? Mindenesetre kell, hogy $p = n$, $q = 2a+n-1$ legyen, azaz

$$n = p, \quad a = \frac{q-p+1}{2}$$

ebben az esetben. Ahhoz, hogy itt a is egész szám legyen, p és q közül az egyiknek párosnak, a másiknak páratlannak kell lennie. Ha ez teljesül, akkor a-tól kezdve n egymásutáni szám összege a fentiek szerint N-nel egyenlő.

$2N$-nek ilyen tényezőkre bontása mindig van ha van páratlan osztója, tehát ha N páratlan, vagy van páratlan osztója. 2 hatványai tehát nem írhatók egymásutáni természetes számok összegeként, minden más szám viszont igen.

III. megoldás. Geometriailag könnyen szemléltethetjük egymástitáni természetes számok összegét pl. kockás papíron. Hogy könnyen tudjuk magunkat kifejezni, nevezzük a metszéspontokat rácspontoknak, Egy-egy számot egy vonalon megjelölt egymásutáni rácspontokkal ábrázolhatunk, az egymásutáni számokat pedig szomszédos egyeneseken rajzoljuk meg. Így egy „lépcsős trapézt” jelöltünk ki, mely a határán és belsejében annyi rácspontot tartalmaz, mint a természetes számok összege.



Illesszünk mellé megfordítva még egy ugyanilyen lépcsős trapézt. Ekkor téglalapot kapunk, mely kétszer annyi rácspontot tartalmaz, mint egy lépcsős trapéz. A két lépcsős trapézt az oldalakkal 45°-os szöget bezáró egyenes választja el, mely átmegy a téglalap középpontján.

Ha már most van egy N egész számunk, úgy próbálhatunk N számú rácspontból lépcsős trapézt csinálni, hogy először $2N$ rácspontot tartalmazó téglalapot rajzolunk, azután ezt a középpontján át húzott 45°-os egyenessel kettévágjuk. Így mindig két lépcsős trapézt kapunk, ha az egyenes nem megy át rácsponton. Ez az egyenes pedig rácspontokon megy át, ha maga a téglalap középpontja is rácspont, vagyis ha a téglalap mindegyik oldalán van középső rácspont; de rácspontokon megy át akkor is, ha a téglalap középpontja egy kis négyzetnek is középpontja, vagyis ha a téglalap egyik oldalán sincs középső rácspont.

Az előbbi azt jelenti, hogy az oldalak mind páros számú rácspontból állnak, az utóbbi azt, hogy mind páratlan számúból.

Lépcsős trapéz tehát akkor szerkeszthető, ha tudunk $2N$ rácspontot tartalmazó téglalapot rajzolni, melynek egyik oldalpárja páratlan, a másik páros számú rácspontot tartalmaz, azaz ha $2N$ egy páros és egy páratlan szám szorzataként írható. Ebből ismét következik, hogy 2 hatványainak kivételével minden természetes szám felírható egymásután természetes számok összegeként.

A III. feladat kapcsán felmerülő további kérdések közül érdekes a válasz a következőre, melyet ki is tűzünk megoldásra.

187. Melyek azok a természetes számok, melyek felírhatók legalább 3 egymásutáni természetes szám összegeként?