Ha r_1 ill. r_2 jelöli a síkban egy P pont távolságát az F_1 ill. F_2 ponttól, akkor azoknak a P pontoknak geometriai helye, amelyekre

$$r_1 + r_2 = \text{állandó} = 2a, \tag{1}$$

egy ellipszis. Azoknak a P pontoknak geometriai helye pedig, amelyekre

$$|r_1 - r_2| = \text{állandó} = 2a, \tag{2}$$

tehát vagy $r_1 - r_2 = 2a$, vagy $r_2 - r_1 = 2a$, egy hiperbola. E két utóbbi egyenletnek eleget tevő P pontok a hiperbola két ágán vannak.

Ha P az F_1F_2 egyenesen kivül fekszik, akkor a PF_1F_2 háromszög oldalai között a

$$PF_1 + PF_2 > F_1F_2,\ PF_1 - PF_2 < F_1F_2,\ PF_2 - PF_1 < F_1F_2$$

egyenlőtlenség áll fenn. Ha $2c$ jelöli az F_1F_2 szakasz hosszát, akkor ezeket

$$r_1 + r_2 > 2c, \quad r_1 - r_2 < 2c, \quad r_2 - r_1 < 2c, \quad F_1F_2 = 2c \tag{3}$$

alakban írhatjuk.

Ezeket az egyenlőtlenségeket az ellipszis, ill. hiperbola (1) ill. (2) egyenletével egybevetve következik, hogy a-nak ugyanahhoz az értékéhez tartozó ellipszis és hiperbola közül csak az egyik létezik. Ha ugyanis $a > c$, akkor nincs olyan P pont, amelyre a (2) egyenlőség érvényes lenne. Ha pedig $a < c$, akkor nincs olyan pont, amelyre (1) fennállana. Ha tehát van olyan P pont a síkban, amelyre az (1) vagy (2) egyenlet közül az egyik érvényes, akkor nincs olyan pont, amelyben a másik egyenlet áll fenn, föltéve, hogy $a \neq c$. (Az $a = c$ esetben az (1) ill. (2) egyenletnek az F_1F_2 egyenesnek azok a pontjai tesznek eleget, amelyek az F_1F_2 szakaszra ill. azon kívül esnek. Az F_1 és F_2 pont mindkét egyenletnek eleget tesz.)

Ha tehát van az F_1 F_2 egyenesen kívül olyan pont, amelyre az (1) és (2) egyenlet közül az egyik érvényes, akkor nincs olyan pont, amelyben a másik teljesül. Az

$$(r_1 + r_2 - 2a)(r_1 - r_2 - 2a)(-r_1 + r_2 - 2a)$$

szorzat a síknak csak olyan P pontjaiban tűnhetik el, ahol valamelyik tényezője eltűnik. Ha $a > c$, akkor azok a P pontok, amelyekben az első tényező eltűnik, az (1) ellipszisen vannak. Ekkor azonban nincs olyan P pont, amelyben második vagy a harmadik tényező eltűnik. Ha pedig $a < c$, akkor azok a pontok, amelyekben a második vagy a harmadik tényező eltűnik a (2) hiperbolán vannak, de nincs olyan P pont, amelyben az első tényező eltűnik.

A kifejezést szimmetrikusabbá tehetjük azáltal, hogy megszorozzuk a $-r_1 - r_2 - 2a$ tényezővel, mely a sík egyetlen pontjában sem válik 0-vá, s így az

$$S = (r_1 + r_2 - 2a)(-r_1 - r_2 - 2a)(r_1 - r_2 - 2a)(-r_1 + r_2 - 2a) \tag{4}$$

szorzatra is érvényes mindaz, amit elmondtunk.

Azok a pontok tehát, amelyekben $S = 0$, ellipszis ill. hiperbola pontjai a szerint, amint $a > c$, ill. $a < c$.

Két tag összege és különbsége szorzatára vonatkozó azonosság szerint

$$\begin{aligned}
S &= \left[4a^2 - (r_1 + r_2)^2\right]\left[4a^2 - (r_1 - r_2)^2\right] = \\
&= (4a^2 - r_2^1 - r_2^2 - 2r_1r_2)(4a^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1r_2) = \\
&= (4a^2 - r_1^2 - r_2^2) - 4r_1^2r_2^2 = 16a^4 - 8a^2(r_1^2 + r_2^2) + \\
&+ r_1^4 + 2r_1^2r_2^2 + r_2^4 - 4r_1^2r_2^2 = 16a^4 - 8a^2(r_1^2 + r_2^2) + \\
&+ (r_1^2 - r_2^2)^2.
\end{aligned}$$

Abban a derékszögű koordinátarendszerben, amelynek kezdőpontja az F_1F_2 szakasz felezőpontja és amelyben az X-tengely az F_1F_2 egyenes, $F_1 = (-c,\ 0)$, $F_2 = (c,\ 0)$, $r_1^2 = (x + c)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - c)^2 + y^2$, ennélfogva

$$r_1^2 + r_2^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2) \quad \text{és} \quad r_1^2 - r_2^2 = 4cx.$$

Helyettesítsük ezeket S legutolsó alakjába:

$$\begin{aligned}
S = 16a^4 - 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 16c^2x^2 &= -16\left[(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^4 + a^2c^2\right] = \\
&= -16a^2(a^2 - c^2)\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1\right].
\end{aligned}$$

Az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0$$

egyenlet tehát az (1) ellipszis ill. a (2) hiperbola egyenlete a szerint, amint $a > c$ ill. $a < c$. Ha tehát az első esetben $a^2 - c^2 = b^2$, a második esetben $a^2 - c^2 = -b^2$-et írunk, akkor az ellipszis ill., hiperbola egyenletét

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alakban írhatjuk.

Feladat:

257. Írjuk fel annak a görbének az egyenletét, melynek pontjaira a $(-2,\ 0)$ ponttól vett távolságnak és az $(1,\ 0)$ ponttól vett távolság kétszeresének az összege állandó.