A körző csuklós műszer, amelyben két kar (szár) közös pontja, a körző sarka, csuklója körül elforgatható. Ha a saroktól a körző hegyéig a két szár hossza a és b ($\leq a$), akkor a körzővel olyan és csak olyan köröket lehet rajzolni, amelyeknek r sugara $a-b$ és $a+b$ között van, mert a, b és r egy háromszög három oldala.

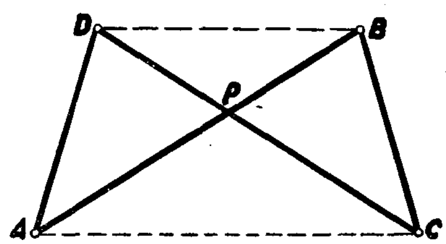
Bizonyos számú állandó hosszúságú kar, amelyeket bizonyos közös pontjaik, csuklók körül el lehet forgatni, csuklós szerkezetet alkot. Ebben a csuklók körül forgatható karok szöge változik.

A körző után a csuklós négyszög a legegyszerűbb csuklós szerkezet. Az $ABCD$ csuklós négyszög $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ és $DA=d$ hosszúságú karból, s ezeket a karokat az egy síkban fekvő A, B, C és D pontban egymáshoz kapcsoló A, B, C és D csuklóból áll. Mivel a, b, c és d egy négyszög négy oldala, azért a négy kar közül akármelyik kisebb, mint a többi három kar összege. Általános csuklós négyszögben a karok hossza különböző lehet és két szomszédos kar összege általában nem egyenlő a másik két kar összegével. A csuklós négyszög egyik szögétől, pl. a $DAB=\alpha$ szögtől függ a többi szög, a két átló hossza és két különböző kar egy-egy pontjának távolsága.

Egy csuklós négyszöget a karok lehető elfordításával igen változatos alakokra lehet hozni. Ugyanaz a csuklós négyszög lehet egyszer konvex, máskor konkáv, harmadszor magát keresztező négyszög, sőt háromszög alakot is mutathat. Ez az utóbbi alak akkor fordul elő, ha két kar egy egyenesbe esik. Az $ABCD$ csuklós négyszög alakjának változtatásakor az a és d kar csak akkor eshetik egymás meghosszabbításába ($\alpha=180^\circ$), ha $a+d$, b és c egy valóságos, vagy egyenes szakaszra elfajuló háromszög oldalai, ekkor $a+d\leq b+c$, s az A csukló a BCD háromszög BD oldalára esik. Az a és d kart akkor fordíthatjuk egymásra ($\alpha=0$), ha az $a\geq d$ esetben $a-d$, b és c egy háromszög oldalai. Ekkor az $ABCD$ csuklós négyszög alakja BCD háromszög, amelynek DB oldalához folytatásként csatlakozik a BA szakasz.

Egy csuklós négyszög egyenes szakaszra fajul el, ha csuklói egy egyenesre kerülnek. Ez akkor fordulhat elő, ha két szomszédos kar együttes hossza a másik két kar együttes hosszával egyenlő, miként paralelogrammában és deltoidban. Deltoidalakú csuklós négyszögnek van L alakja is, amikor két csukló egymásra esik, s azokból kiinduló karok fedik egymást és egymásra merőlegesek.

Az $ABCD$ csuklós paralelogrammából származó keresztező négyszög, ellenparalelogramma d karjának (A és D csuklójának) rögzítésekor a csuklós négyszög többi három karjának elforgatása alatt a P keresztezéspont A és D gyújtóponttal és $AB=CD=a$ hosszúságú főtengellyel bíró ellipszisen mozog.



1. ábra.

Az AB és CD szemközt fekvő és egyenlő oldal P metszéspontja A-tól és C-től egyenlő távolságra van, mivel az ABC és ADC háromszög egybevágósága miatt az APC háromszög AC alapján fekvő szögek egyenlők. Emiatt $AP=PC$ és

$$AP+DP=PC+DP=CD=AB=a.$$

A P keresztezéspontnak ezt a tulajdonságát használta fel 1931-ben Yates R. amerikai matematikus ellipszisrajzoló készülékének elkészítésére. (Készülékét általánosabb görbék rajzolására szükséges alkatrészekkel is fölszerelte.)

Már a gőzgép felfedezője Watt is használt csuklós paralelogrammát, hogy a dugattyú mozgása a gőzhengerben lehetőleg egyenesvonalú legyen.

*

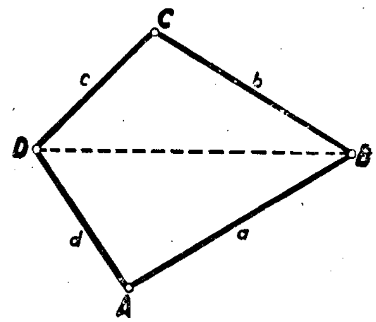
A csuklós négyszögnek egy olyan csuklóját, amelynek szöge 0 és 180° között minden szögértéken átmehet, *teljes fordulású csukló*-nak nevezzük.

Az $ABCD$ csuklós paralelogramma mind a négy csuklója teljes fordulású. Ha az A és C csuklót annyira széthúzzuk, hogy B és D az AC szakaszra essék, akkor $\alpha=\gamma=0$ és $\beta=\delta=180^\circ$. Ha pedig a B és D csukló széthúzásával A és C a BD szakaszra esik, akkor $\alpha=\gamma=180^\circ$ és $\beta=\delta=0$. Amíg a csuklós paralelogramma egyik szélső (elfajult) alakjából a másikba átmegy, mindegyik szöge átmegy 0 és 180° között minden szögértéken.

Olyan csuklós négyszögre, amelyben a karok hossza különböző, a következő tételt mondhatjuk ki:

Egy olyan csuklós négyszögben, amelynek négy karja közül van egy legkisebb és egy legnagyobb, vagy két csukló teljes fordulású, vagy egy sem. Ha van a csuklós négyszögben teljes fordulású csukló, akkor az a két csukló ilyen, amelyet a legrövidebb kar köt össze. A legrövidebb karral összekapcsolt két csukló mindig teljes fordulású, ha a legrövidebb és a leghosszabb kar együttes hossza nagyobb, mint a másik két kar együttes hossza.

A tételnek két megoldását adjuk. Aki még trigonometriáról nem hallott, az az elsőt átugorhatja. Először azt vizsgáljuk, hogy az $ABCD$ csuklós négyszög oldalainak a, b, c, d hosszából milyen következtetést lehet vonni az α szögre.



Az ABD háromszögben a cosinustétel szerint

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha;$$

a BCD háromszögben pedig

$$|b-c| \le BD \le b+c,$$

(itt egyenlőség jele is állhat, mivel a B, C és D pont egy egyenesre is eshet). Így $\cos\alpha$-ra a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$C_1 = \frac{a^2+d^2-(b+c)^2}{2ad} \le \cos\alpha = \frac{a^2+d^2-BD^2}{2ad} \le \frac{a^2+d^2-(b-c)^2}{2ad} = C_2. \tag{1}$$

Kérdés, milyen értékek közt változhat α? Milyen feltételek mellett érheti el $\cos\alpha$ a fenti határokat? A cosinus függvény 0 és 180° között egynél nem nagyobb számértékű minden valós C értéket fölvesz, tehát minden olyan C értéket, amelyre $1+C \ge 0$ és $1-C \ge 0$, mert ekkor szükségképpen $|C| \le 1$.

$$1 - C_1 = \frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2ad} = \frac{(b+c+a-d)(b+c+d-a)}{2ad} > 0$$

és

$$1 + C_2 = \frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2ad} = \frac{(a+d+b-c)(a+d+c-b)}{2ad} > 0$$

mindig teljesül, mert a négyszög bármely oldala kisebb, mint a többi háromszög összege.

Így ha

$$1 + C_1 = \frac{(a+d)^2-(b+c)^2}{2ad} \ge 0,$$

akkor van olyan α_1 szög, amelyre $\cos\alpha_1 = C_1$, különben pedig nincsen. Ha nem az egyenlőségjel érvényes, akkor $\alpha_1 < 180°$. Ez pedig egyértelmű azzal, hogy

$$a+d > b+c.$$

Ekkor $\cos\alpha_1 = C_1 \le \cos\alpha$, tehát $\alpha \le \alpha_1 < 180°$.

Hasonlóan: ahhoz, hogy legyen olyan α_2, amelyre $\cos\alpha_2 = C_2$, kell, hogy

$$1 - C_2 = \frac{(b-c)^2-(a-d)^2}{2ad} \ge 0, \text{ azaz } |b-c| \ge |a-d|$$

legyen. Ekkor $\cos\alpha \le C_2 = \cos\alpha_2$ folytán $\alpha \ge \alpha_2$, és $\alpha_2 > 0$, ha

$$|b-c| > |a-d|.$$

Ha az $a+d > b+c$ és $|a-d| < |b-c|$ egyenlőtlenség egyszerre teljesül, akkor $180° > \alpha_1 \ge \alpha \ge \alpha_2 > 0$.
Ha ellenben egyszerre fennáll az $a+d \le b+c$ és az $|a-d| \ge |b-c|$ egyenlőtlenség is, akkor az α szög 0 és 180° között minden értéket felvehet, mivel $\cos\alpha$-nak 0 és 180° között nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke. Ekkor az A csukló teljes fordulású.

Számítás nélkül is könnyű bebizonyítani, hogy az $a+d \le b+c$ és az $|a-d| \ge |b-c|$ egyenlőtlenség fennállása esetén A teljes fordulású csukló, különben pedig nem az.

Föltételezhetjük, hogy $a \ge d$. Vizsgáljuk ismét a BD átlót. A négyszög bármely helyzetében az $ABD\triangle$-ből azt kapjuk, hogy

$$a-d \le BD \le a+d,$$

a $BCD\triangle$-ből pedig

$$|b-c| \le BD \le b+c.$$

Ezek szerint az AD kart akkor lehet az AB kar meghosszabbításába forgatni, ha

$$a + d \le b + c \tag{2}$$

és akkor lehet ráforgatni az AB karra, ha

$$a - d \ge |b - c|.$$

Ha valamelyik egyenlőtlenség helytelen, akkor a megfelelő forgatás sem hajtható végre. Tegyük fel, hogy $b \ge c$, ekkor az utóbbi egyenlőtlenségben elhagyható az abszolútérték jele, mert a különbség pozitív, és az egyenlőtlenség így rendezhető:

$$b + d \le a + c. \tag{3}$$

(2)-t és (3)-at összeadva

$$a + b + 2d \le a + b + 2c; \text{ azaz } d \le c.$$

Mivel feltettük, hogy $a \ge d$ és $b \ge c$, így azt kaptuk, hogy d a legrövidebb kar, a leghosszabb pedig a vagy b. Mindkét esetben a (2) és (3) azt mondja, hogy a legrövidebb és leghosszabb oldal együtt nem lehet hosszabb a másik kettő összegénél. Ekkor és csak is ekkor lehet az A csúcs – és az eredmény mutatja, hogy egyúttal a legrövidebb oldal másik végpontja a D csúcs is – teljes körülfordulású.

Ezek szerint a csuklós négyszögnek kétféle fajtája van, az egyik fajtának van teljes fordulású csuklója, a másiknak nincs. Az olyan csuklós négyszöget, amelynek nincs teljes fordulású csuklója, a karok forgatásával nem lehet úgy alakítani, hogy az egyik csuklóban a két kar szöge egyszer 0° és máskor 180° legyen. Mindig lehet azonban úgy alakítani, hogy egyszer valamelyik csuklóban a két kar szöge 0° legyen és máskor pedig egy másik csuklóban a két kar szöge 180° legyen.

Ha ugyanis semmikép sem lehetne az $ABCD$ csuklós négyszöget úgy alakítani, hogy az A, B, C és D csuklóban a két kar α, β, γ, ill. δ szöge közül valamelyik 180° legyen, akkor

$$\alpha \le \alpha_1 < 180^\circ, \quad \beta \le \beta_1 < 180^\circ, \quad \gamma \le \gamma_1 < 180^\circ \quad \text{és} \quad \delta \le \delta_1 < 180^\circ$$

volna, ahol

$$\cos\alpha_1 = \frac{a^2 + d^2 - (b + c)^2}{2ad}, \qquad \cos\beta_1 = \frac{a^2 + b^2 - (c + d)^2}{2ab},$$
$$\cos\gamma_1 = \frac{b^2 + c^2 - (a + d)^2}{2bc}, \qquad \cos\delta_1 = \frac{c^2 + d^2 - (a + b)^2}{2cd}.$$

Ekkor azonban

$$2ad\cos\alpha_1 + 2ab\cos\beta_1 + 2bc\cos\gamma_1 + 2cd\cos\delta_1 = -2ad - 2ab - 2bc - 2cd$$

és így

$$2ad(1 + \cos\alpha_1) + 2ab(1 + \cos\beta_1) + 2bc(1 + \cos\gamma_1) + 2cd(1 + \cos\delta_1) = 0$$

volna. Ez azonban lehetetlen, mert 0 és 180° között fekvő α_1, β_1, γ_1, δ_1 szögre az utolsó egyenlet baloldalának mindegyik tagja pozitív.

Ha pedig α, β, γ, δ közül egy sem lehetne zérus a csuklós négyszögben, akkor volna olyan 180°-nál nem nagyobb pozitív α_2, β_2, γ_2, δ_2 szög, hogy

$$\cos\alpha_2 = \frac{a^2 + d^2 - (b - c)^2}{2ad}, \qquad \cos\beta_2 = \frac{a^2 + b^2 - (c - d)^2}{2ab},$$
$$\cos\gamma_2 = \frac{b^2 + c^2 - (a - d)^2}{2bc}, \qquad \cos\delta_2 = \frac{c^2 + d^2 - (a - b)^2}{2cd}.$$

Ebből következik, hogy

$$2ad(1 - \cos\alpha_2) + 2ab(1 - \cos\beta_2) + 2bc(1 - \cos\gamma_2) + 2cd(1 - \cos\delta_2) = 0.$$

Ez azonban szintén ellentmondás, mivel az egyenlet baloldalán mindegyik tag pozitív.