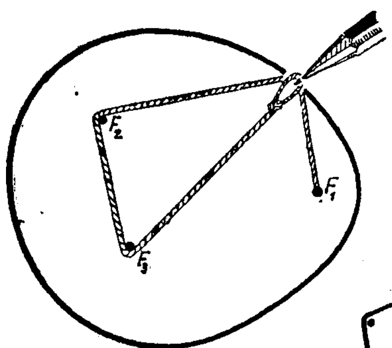
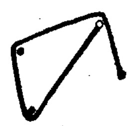
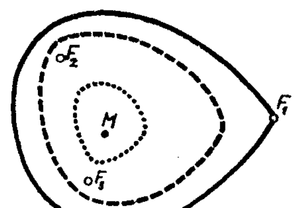
II.

Folyóiratunk előző számában kör, ellipszis, hiperbola fonalas szerkesztéséről volt szó. A következőkben kevésbé ismert görbék fonalas szerkesztéseit fogom tárgyalni. Az ellipszishez hasonlóan felvethetjük azt a kérdést is, hogy milyen görbét alkotnak azok a pontok, melyeknek három adott pontból vett távolságuk összege állandó. Ezt a görbét is könnyen megrajzolhatjuk. Rajztáblánkra rakjunk papirost és szúrjunk az F_1, F_2, F_3 pontokba rajzszögeket. Ez a három rajzszög legyen a három fókusz. Egy fonal egyik végét rögzítsük F_1-hez, a másik végére pedig kössünk egy hurkot és abba illesszük be ceruzánkat. A fonal ezen szabad végével megkerüljük az F_2 és F_3 fókuszpontot, ahogyan azt az 1. ábra mutatja. A hurokba helyezett ceruzát úgy mozgatjuk, hogy a fonal mindig megfeszüljön körös-körül. Közben vigyázzunk arra, hogy a fonal az F_2F_3, szakaszon mindig csak egyszeresen szerepeljen. Ezt úgy érhetjük el, hogy amikor a mozgó P pont két fókusszal egy egyenesbe esik, a megfelelő fonalat átrakjuk azon a fókuszon, mely a fentiek teljesülését gátolná[1]. Az így leírt görbének tetszőleges P pontja a három fókuszhoz képest úgy helyezkedik el, hogy az ezektől vett távolságok összege állandó, ez a távolság a fonal hosszánál az F_2F_3, szakasszal rövidebb.



1. ábra.

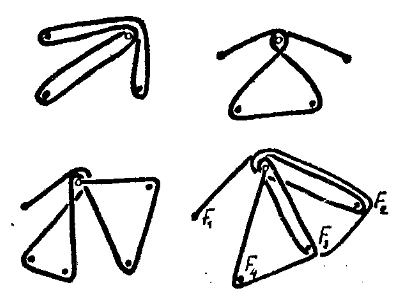




2. ábra.

Ha a fonalat jó hosszúra választjuk, akkor a görbe csaknem kör alakú. A fonal hosszát mind kisebbre választva a görbe mind határozottabban eltér a kör alaktól és tojás alakú lesz. Előfordulhat az is, hogy valamelyik fókusz a görbevonalra esik és ekkor a görbének ennél a fókusznál szögpontja van. Tovább rövidítve a fonalat, olyan görbéket is kaphatunk, ahol a görbén kívül is lesz fókuszpont (2. ábra). Általában véve minden lehetséges kombináció előfordulhat, attól kezdve, hogy mind a három fókusz a görbén belül van, egészen addig, hogy mind a három a görbén kívül van (1. és 2. ábra). A fonal hosszát csak addig lehet rövidíteni, míg a görbe folytonosan kisebbedve egy M ponttá zsugorodik össze (2. ábra). Ez az M pont azzal a tulajdonsággal bír, hogy a három fókuszpont által meghatározott háromszög csúcsaitól vett távolságainak összege a legkisebb.

Megjegyzem még, hogy három fókusz esetén másképpen is rendezhetjük a fonalat (3. ábra). Hasonló eljárással négy- vagy több fókuszú görbéket is rajzolhatunk. Négy és öt fókusz esetére is matat egy-egy alkalmas fonalmenetet a 3. ábra.



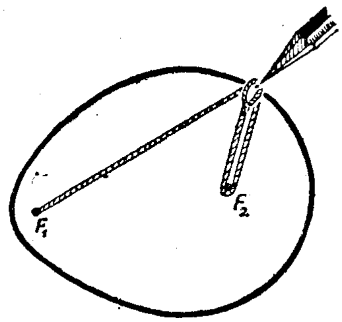
3. ábra.

Ezek mintájára tetszőleges számú fókusz esetén is el lehet rendezni a fonalat, több fókusz esetén azonban a fonal többszöri megtörése miatt fellépő súrlódás jelentősen megnehezíti a szerkesztést.

*

Vizsgáljuk most más oldalról egy háromfókuszos görbe tulajdonságait: közelítsük az egyik fókuszt pl. F_3-t F_2-höz. Minél közelebb van F_3 F_2-höz, annál inkább tojás alakú a görbe. Mikor F_3 összeesik az F_2-vel, végeredményben csak két fókusz van F_1 és F_2 azonban az F_2 -től vett távolságot kétszer kell tekinteni, vagyis a görbére nézve most a PF_1+2PF_2 távolságösszeg lesz állandó, jelöljük értékét k-val. Úgy szokás mondani, az F_2 fókusznak itt kétszeres *súlya* van.

[1]Ugyanez volt a nehézség ez ellipszis a szerkesztésekor, ha a fonal két vége volt rögzítve.



4. ábra.

Ez a görbe tehát két különböző súlyú fókusszal rendelkező tojásgörbe; a szakirodalomban Descartes-féle oválís néven ismeretes görbék közé tartozik. Így nevezik általában azokat a görbéket, melyeket a $q_1PF_1 + q_2PF_2 = k$ összefüggés jellemez, ahol q_1 és q_2 különböző pozitív számokat, k pedig egy állandó értéket jelent.[2] Ezek a görbék jelentős szerepet töltenek be a fénytanban.

Ha a Descartes-féle ovális fókuszait változatlanul hagyjuk és a fonal hosszát változtatjuk, akkor konfokális Descartes-féle oválisok rajzolunk. Ezek között az oválisok között van olyan, melynek fókusza a görbére esik. Ilyenkor szögpontja van a görbének. Olyan is lehet, melyen kívül esik az egyik fókusz, azonban nincs olyan görbe, melyen mindkét fókusz kívül lenne. Természetesen fonallal nemcsak $q_1 = 1$ és $q_2 = 2$ súllyal, hanem más egész súlyokkal rendelkező Descartes-féle oválist is lehet szerkeszteni.

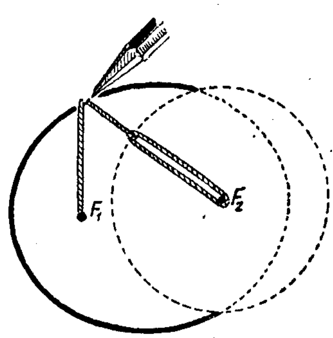
Nem csak két fókusz, hanem három és több fókusz is szerepelhet különböző súlyokkal. A 3. ábra utolsó fonalmenetéről pl. leolvashatjuk, hogy ott az F_1 fókusz egyszeres súlyú, az F_2 3-szoros és í. t. Így a görbe egyenlete: $PF_1 + 3PF_2 + \ldots = k$ (Írjuk be a hiányzó tagokat!)

Az említett görbék mind olyan görbék, melyen fekvő pontoknak az F_1, F_2, F_3 $\ldots F_n$ rögzített pontoktól való távolságaikat adott állandókkal szorozva állandó összeget kapunk, azaz melyekre

$$q_1PF_1 + q_2PF_2 + q_3PF_3 + \cdots + q_nPF_n = k,$$

ahol $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ és k adott állandók. Egy egyenesen fekvő fókuszú ilyen görbék fonalas szerkesztése a XVII. század végén Tschirnhaus hollandi matematikusnál található először.[3]

Vizsgáljuk meg most, hogy milyen görbéket kapunk, ha pontok helyébe valamilyen görbét teszünk. Keressük azon pontok geometriai helyét, melyek távolságainak összege egy adott ponttól és egy adott körtől véve állandó (k). Ennek fonalas szerkesztése is egyszerű. A kört helyettesíthetjük egy hurokkal (5. ábra).



5. ábra.

A fonal egyik végét kössük az F_1-hez, a másik végét pedig a hurokhoz. A fonalat feszítsük ki ceruzánkkal és mozgassuk úgy, hogy a. fonal kifeszítve maradjon. Megállapíthatjuk, hogy a görbe vonal, amit kaptunk, egy ellipszis íve. Ugyanis egy tetszőleges P pont távolságainak összegeF_1-től és a kör F_2 középpontjától, ha r a kör sugara, $k + r$ és ez állandó. Ha a fonal hossza nagyobb, mint $F_1F_2 + r$, akkor teljes ellipszist kapunk. Ha azonban a fonal hosszát ennél a távolságnál kisebbre vesszük, akkor az ellipszis csak a körig fut. (Hogy folytatódik onnan?) A szerkesztést elvégezhetjük úgy is, hogy hurok helyett F_2 körül r sugárral kört rajzolunk, s az F_1 és F_2-höz rögzített fonal hosszát $k + r$-nek vesszük, de az ellipszist ekkor csak az előre lerajzolt körig rajzolhatjuk.

Még akkor is meg tudjuk szerkeszteni a görbét, ha egy vagy több fókusz helyébe kör helyett valamilyen más Tschirnhaus-féle görbét teszünk. Például megrajzolhatjuk azon pontok mértani helyét, melyek távolságainak összege egy ponttól és egy Descartes-féle oválistól állandó. Ekkor az oválist a szerkesztéshez föntebb használt fonalmenettel helyettesítjük és a ceruza számára szolgáló hurokhoz, meg az adott ponthoz kötünk adott hosszúságú fonaldarabot.

---

[2]Ha a Descartes-féle ovális, két $n = \dfrac{q_1}{q_2}$ törésmutatójú anyag érintkezési görbéje, akkor az F_1-ből kiinduló sugárnyaláb törés után F_2-n megy át. Innen ered ezek fénytani jelentősége és annak magyarázata, hogy F_1, F_2-t fókusznak nevezik.

[3]Műve: „Medicina mentis"(1695. Leipzig, első kiadás: 1686. Amszterdam). A kutatás módszereit vizsgálva példaképpen használja ezeket a görbéket.

Aki kíváncsi a keletkező görbékre, rajzolja meg őket. Ez bizonyosan meg fogja könnyíteni a választ az alábbi kérdésekre.

201. A cikkben nem tárgyaltuk meg teljesen azon pontok geometriai helyét, melyek egy ponttól és egy körtől vett távolságainak összege állandó. Adjuk a kérdés teljes tárgyalását, minden lehetőséget figyelembe véve.

202. Adva legyen két – F_1, F_2 középponttal rendelkező – K_1, K_2, kör. Jelöljük egy tetszőleges pont távolságát a két körtől d_1, ill. d_2-vel.

Mi a mértani helye azon pontoknak, melyekre $d_1 : d_2$ állandó?