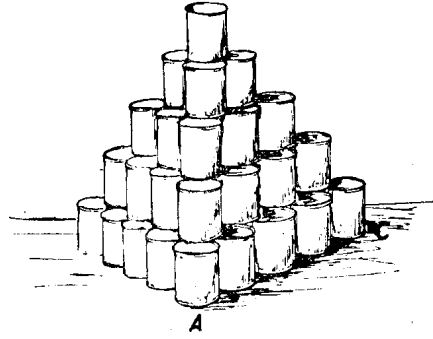


Tegnapelőtt megálltam a házukban lévő KÖZÉRT-fióküzlet kirakata előtt, és nézegettem az ott gúlaszerűen felrakott konzervedobozokat, melyek ilyenformán voltak elhelyezve:



Vajon hány doboz lehet egy ilyen gúlában, ha az  $n$  réteg magas? Ha az egyes rétegekben mindig, pl. az  $AC$ -vel párhuzamos egyenesek mentén elhelyezkedő dobozok számát adjuk össze:

a legfelső rétegben van	1	=	1	doboz
felülről a másodikban	1 + 2	=	3	„
felülről a harmadikban	1 + 2 + 3	=	6	„
felülről a negyedikben	1 + 2 + 3 + 4	=	10	„
felülről az ötödikben	1 + 2 + 3 + 4 + 5	=	15	„
felülről a $k$ -adikban	1 + 2 + ... + $k$	=	$\frac{k(k+1)}{1 \cdot 2}$	
. . . . .	. . . . .	=	$\binom{k+1}{2}$	doboz
. . . . .	. . . . .	=	$\binom{n+1}{2}$	„
felülről az $n$ -edikben	1 + 2 + ... + $n$	=	$\binom{n+1}{2}$	„

Ezt az 1, 3, 6, 10, 15, . . . számsorozatot a *háromszögszámok* sorozatának nevezzük, mert éppen azt mutatja, hogy a gúla egy-egy rétegében levő háromszögek síkjában hány doboz van. Ezen sorozatot röviden így is jelölhetjük:

$$\binom{k+1}{2}, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Továbbá a gúla első rétegében van	1	=	1	doboz,
az első 2 rétegben együtt	1 + 3	=	4	„
az első 3 rétegben együtt	1 + 3 + 6	=	10	„
az első 4 rétegben együtt	1 + 3 + 6 + 10	=	20	„
az első 5 rétegben együtt	1 + 3 + 6 + 10 + 15	=	35	„
. . . . .	. . . . .	=	$\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$	„ (1)

Az 1, 4, 10, 20, 35, . . . számokat *gúlaszámoknak* nevezzük, hiszen éppen azt mutatják, hogy egy 1, 2, 3, 4, . . .  $n$ -rétű gúlában hány doboz van.

Feltett kérdésünkre az  $n$ -edik gúlaszám:  $g_n$ , adja a megoldást és ezt úgy kapjuk, hogy összegezzük az első  $n$  háromszögszámot. Az  $n$ -edik háromszögszámot az összeadás kikerülésével, könnyen ki tudjuk számítani, hiszen  $h_n = \binom{n+1}{2}$ .

Ha  $h_{52}$ -t akarjuk megkapni,  $n$  helyében 52-t helyettesítünk. Bezzeg  $g_{52}$ -t (1)-ből csak 51 összeadással tudjuk egyelőre kiszámítani, ami igen hosszadalmas dolog, különösen azért, mert mind az 52 tagot külön-külön ki kell számíthatni. Keressünk a  $g_n$  kiszámítására valami hasonlóan kényelmes utat. Láttuk, hogy  $g_1 = 1$ ,  $g_2 = 4$ ,  $g_3 = 10$ ,  $g_4 = 20$ ,  $g_5 = 35$ . Nézzük meg milyen arányban növekszenek ezek a számok:

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{4}{1}, \quad \frac{g_3}{g_2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \quad \frac{g_4}{g_3} = \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{g_5}{g_4} = \frac{35}{20} = \frac{7}{4}.$$

Ebbe a sorba a 2 mint  $\frac{6}{3}$  illik bele, s akkor egész egyszerű szabályosságot veszünk észre:  $\frac{4}{1}, \frac{5}{2}, \frac{6}{3}, \frac{7}{4}, \dots$ . Ha itt

most valóban  $\frac{8}{5}, \frac{9}{6}, \dots$  következik, akkor már könnyebben tudjuk a gúlaszámokat is kiszámítani.

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 1 \cdot \frac{4}{1}, \quad g_3 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}, \quad g_4 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$g_5 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ és így folytatódnék}$$

$$g_6 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56,$$

$$g_7 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84, \dots$$

Ha tehát helyesen figyeltük a sorozat szabályosságát, akkor általánosan az  $n$ -edik gúlaszám így számítható ki:

$$(2) \quad g_n = \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Igazoljuk ezt teljes indukcióval. Tudjuk már, hogy  $n = 1, 2, 3, 4$  és 5-re helyes az eredmény. Tegyük fel valamilyen  $k$  számra már igazoltuk az eredményt:  $g_k$  az első  $k$  háromszögszám összege, így írható:

$$g_k = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} = \frac{(k+2)(k+1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Mindkét oldalhoz  $\frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2}$ -t adva:

$$g_{k+1} = g_k + \frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2} = \frac{(k+2)(k+1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2} = \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Ez éppen a (2)-es formula, ha  $n$  helyébe  $(k+1)$ -et írunk. Így (2)-t minden pozitív egész számra igazoltuk.

A már jól ismert jelöléssel (2) rövidebben így írható:

$$g_k = \binom{k+2}{3}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Gyakorlatképpen hasonlóan igazolhatjuk, hogyha a gúlaszámok tagjainak összeadásával újabb sorozatot képzünk:

$$s_1 = g_1, \quad s_2 = g_1 + g_2, \quad s_3 = g_1 + g_2 + g_3, \quad \dots,$$

$$s_n = g_1 + g_2 + \dots + g_n, \quad \dots,$$

$$\text{akkor: } s_n = \binom{n+3}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Persze itt  $s_n$ -nek nincsen olyan szemléletes értelme, mint amilyen  $h_n$  és  $g_n$ -nek volt.

Ezt az eljárást most tovább is ismételtethetjük. Általában egy számsorozatból kiindulva ilyen módon mindig az első  $n$  tag összegét vesszük egy újabb sorozat  $n$ -edik tagjául, és ezt az eljárást ezen új sorozatra folytatjuk, az így nyert sorozatra az eljárást megint megismételjük és így tovább. Az ilyen sorozatok tagjait most már nem lesz célszerű mindig új betűkkel jelölni, hanem kétindexes jelöléssel azt is fel fogjuk tüntetni, hogy hányszor ismételtük meg ezt az összegezést az eredeti sorozatból kiindulva, és hogy a szóban forgó sorozat hányadik tagjáról beszélünk:

$$a_1^{(1)} = 1, \quad a_2^{(1)} = 2, \quad \dots, \quad a_n^{(1)} = n, \quad \dots$$

Az ebből képzett sorozat tagjait így jelöljük:

$$a_1^{(2)} = a_1^{(1)}, \quad a_2^{(2)} = a_1^{(1)} + a_2^{(1)}, \quad \dots, \quad a_n^{(2)} = a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \dots + a_n^{(1)}, \quad \dots$$

Az eljárást ismételve:

$$a_n^{(3)} = a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \dots + a_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Általában az eljárás  $k-1$ -edik ismétlése után az  $n$ -edik tag:

$$a_n^{(k)} = a_1^{(k-1)} + \dots + a_n^{(k-1)}, \quad \begin{matrix} n=1,2,3,\dots \\ k=2,3,\dots \end{matrix}$$

Összefoglalva az eddig mondottakat azt láttuk be, hogy

$$(3) \quad a_n^{(1)} = \binom{n}{1}; \quad a_n^{(2)} = \binom{n+1}{2}; \quad a_n^{(3)} = \binom{n+2}{3}; \quad a_n^{(4)} = \binom{n+3}{4};$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

De hasonlóan egyszerű a további sorozatok általános tagját is kiszámítani. Igazolni fogjuk a következőt: ha a természetes számok sorozatából kiindulva az összegezéssel nyert új sorozatképzést  $v$ -szer ismétljük,

$$(4) \quad a_n^{(v+1)} = a_1^{(v)} + a_2^{(v)} + \dots + a_n^{(v)} = \binom{n+v}{v+1}.$$

Ennek bizonyítására kétszeresen fogjuk alkalmazni a teljes indukciót. A  $v = 0, 1, 2, 3$  esetben (4) érvényességét (3) mutatja. Tegyük fel, hogy valamilyen  $v = k - 1$  értékre már igazoltuk (4) helyességét. Definíció szerint

$$a_n^{(k+1)} = a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + \dots + a_n^{(k)}$$

és mivel a feltétel szerint most  $a_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$ , azt kell tehát igazolni, hogy

$$(5) \quad \binom{1+k-1}{k} + \binom{2+k-1}{k} + \dots + \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k}{k+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ezt ismét teljes indukcióval fogjuk igazolni. Az  $n = 1$  esetben ez igaz, mert

$$\binom{k}{k} = 1 = \binom{1+k}{k+1}.$$

Azt kell még belátnunk, hogyha (5) valamilyen  $n = l - 1$  esetre igaz, ebből következik, hogy igaz a következő  $n = l$  esetre is. Tegyük fel tehát, hogy  $n = l - 1$ -re már igazoltuk (5)-öt. Tehát

$$\binom{1+k-1}{k} + \dots + \binom{(l-1)+k-1}{k} = \binom{(l-1)+k}{k+1}.$$

Azt kell még igazolni, hogy

$$(6) \quad \binom{(l-1)+k}{k+1} + \binom{l+k-1}{k} = \binom{l+k}{k+1}.$$

Ez pedig egyszerű számolással tényleg belátható

$$\begin{aligned} \binom{l-1+k}{k+1} + \binom{l+k-1}{k} &= \frac{(l-1+k)!}{(k+1)!(l-2)!} + \frac{(l+k-1)!}{k!(l-1)!} = \\ &= \frac{(l-1+k)!(l-1) + (l+k-1)!(k+1)}{(k+1)!(l-1)!} = \frac{(l+k)!}{(k+1)!(l-1)!} = \binom{l+k}{k+1}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk (5)-öt. (5) igazolásával viszont (4) teljes indukciós bizonyítását fejeztük be.

Vessük fel most fordítva a kérdést, legyen a számoknak valamilyen sorozata

$$(A) \quad a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

Keletkezhetik-e ez valamilyen egyszerűbb sorból a fenti összegező eljárással? Könnyű megtalálni, hogy melyik sor összegezéséből keletkezett sorunk, hisz az összegezésnél keletkezett sor  $n - 1$ -edik és  $n$ -edik tagja épp az eredeti sor  $n$ -edik tagjában különbözik. Így csak az első tagot nem kapjuk vissza, azt el is szoktuk hagyni. Vonjuk tehát ki az (A) sorozat minden egyes tagjából az öt megelőzőt, ezen különbségekből képezzünk egy újabb sorozatot

$$(B) \quad b_1 = a_2 - a_1, \quad b_2 = a_3 - a_2, \quad \dots, \quad b_n = a_{n+1} - a_n, \quad \dots$$

Ezt a  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  sorozatot (A) *elsőrendű referenciasorozatának* mondjuk, jelöljük ezt (B)-vel. Hasonlóan képezhető (B) differenciasora is:

$$c_1 = b_2 - b_1, \quad c_2 = b_3 - b_2, \quad \dots, \quad c_n = b_{n+1} - b_n.$$

A  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  sorozatot (A) *másodrendű differenciasorozatának* mondjuk. Ugyanúgy képezhető (A) 3-ad, 4-ed, 5-öd,  $\dots$ -rendű differencia sora. Fentebb tárgyalt sorozatainkat egy érdekes közös tulajdonság jellemzi a számsorozatok közt, mely a differenciák segítségével egyszerűen fogalmazható meg. A háromszögszámok másodrendű differenciasora csupa egyenlő szám:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ & & 1 & 1 & 1 & \dots \end{array}$$

Hasonlóan a gúlaszámoknál a harmadrendű differenciák sora lesz csupa egyenlő szám és az összegező eljárás többszöri ismétlése után is mindig olyan számsorozatot kapunk, melynek valamelyik differenciasora már csupa egyenlő

számból áll, csak annál később következik ez be, minél többször ismételtük eredetileg az összegezési eljárást. Persze ez nem minden sorozatnál van így, pl. ennél a sorozatnál egyetlen differenciasor sem állhat csupa egyenlő számból:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots \\ & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots \\ & & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots \end{array}$$

Ha egy sorozat  $k$ -adik differenciasora csupa egyenlő szám, akkor azt  $k$ -adrendű számtani sorozatnak mondjuk. (Ha egyik differenciasora sem áll csupa egyenlő számból, akkor a sorozat nem számtani.)

Ha egy (B) sorozathoz ismerjük, azt az (A) sorozatot, melynek (B) differenciasora, akkor könnyű a (B) sorozat tagjait összegezni, hisz

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + \\ &+ (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1, \end{aligned}$$

tehát a differenciasor első  $n$  tagjának összegét az eredeti sor  $n+1$ -edik és kezdő tagjának különbsége adja meg. Ha a (B) differenciasorozatot és még  $a_1$ -et ismerjük, akkor ismerjük az (A) sorozatot is:

$$(7) \quad a_{n+1} = a_1 + b_1 + \dots + b_n.$$

Cikkünk első részében tulajdonképpen azt láttuk be, hogy  $a_n^{(v)}$  sorozatok  $v$ -edrendű számtani sorozatok.

U. i. tudjuk (4)-ből, hogy  $a_n^{(v+1)} = \binom{n+v}{v+1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . A (6)-ból nyerhető  $\binom{n+v}{v+1} - \binom{n+v-1}{v+1} = \binom{n+v-1}{v}$  képlet alapján ennek differenciasorai így írhatók egymás alá

$$\begin{array}{ccccccc} \binom{1+v}{v}, & \binom{2+v}{v}, & \binom{3+v}{v}, & \binom{4+v}{v}, & \dots & & \\ \binom{1+v}{v-1}, & \binom{2+v}{v-1}, & \binom{3+v}{v-1}, & \binom{4+v}{v-1}, & \dots & & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \\ \binom{1+v}{2}, & \binom{2+v}{2}, & \binom{3+v}{2}, & \binom{4+v}{2}, & \dots & & \\ \binom{1+v}{1}, & \binom{2+v}{1}, & \binom{3+v}{1}, & \binom{4+v}{1}, & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & & \end{array}$$

Tehát a  $v+1$ -edik differenciasora csupa 1-esből áll. Ha  $\binom{n+v}{v+1}$ -t rövidebben  $\binom{l}{k}$ -val jelöljük ( $l = k, k+1, k+2, \dots$ ) kimondhatjuk, hogy  $\binom{l}{k}$  egy pontosan  $k$ -adrendű számtani sorozat tagjait szolgáltatja.

Ezek a sorozatok példák akárhányadrendű számtani haladványra. Az is könnyen látható, hogy számtani sorozatok összege is számtani sorozat, és pedig legfeljebb annyiadrendű, mint a legmagasabbrendű összeadandó. Sorozatok összegének a differenciasora ugyanis az egyes sorok differenciasoraiból adódik össze, egy  $k$ -adrendű számtani sorozat differenciasorai pedig a  $k+1$ -edikről kezdve csupa 0-ból állnak, így az alacsonyabbrendű számtani sorozatok differenciasorai az ismételt differenciaképzés közben kiesnek. Egy számtani sorozat tagjait egy számmal végigszorozva szintén számtani sorozatot kapunk, ugyanannyiadrendűt, mint az eredeti sorozat. Így a már ismert számtani sorozatokból sok újabbat képezhetünk. Kérdés most, mit tudunk mondani egy tetszőleges  $k$ -adrendű számtani sorozat szerkezetéről?

Jelöljük egy tetszőleges  $k$ -ad rendű számtani sorozat  $n$ -edik tagját  $a_n^{(k)}$ -val. Az elsőrendű (közönséges) számtani sorozatnál két kezdőtagból  $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}$ , egyértelműen meghatározhatjuk az egész sorozatot. A sorozat állandó különbsége ugyanis az  $a_2^{(1)} - a_1^{(1)}$ , s így

$$a_n^{(1)} = a_1^{(1)} + (n-1)(a_2^{(1)} - a_1^{(1)}).$$

Ugyan hány egymásután következő tagból lehet meghatározni egy  $k$ -adrendű számtani sorozat további tagjait? Egy másodrendűnél ehhez 3 tag kell:  $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}$ , ugyanis az első differenciasor elsőrendű számtani haladvány, mely első két tagjából már egyértelműen meghatározható, ez a két tag pedig a másodrendű sorozat három tagjából kiszámítható:

$$a_2^{(2)} - a_1^{(2)} = a_1^{(1)}, \quad a_3^{(2)} - a_2^{(2)} = a_2^{(1)}.$$

Viszont tudjuk, hogy bármely sorozatot elsőrendű differenciasora és kezdőtagja egyértelműen meghatározza.

Az elsőrendű számtani sorozatnál 2, a másodrendűnél 3 kezdőtag kellett a sorozat teljes és egyértelmű meghatározásához. Várható, hogy egy pontosan  $k$ -adrendű számtani sorozatnál ehhez az első  $k + 1$  tag kell. Valóban képezzük rendre az egymásutáni differenciasorokat:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & a_4^{(k)} & \dots & a_{k+1}^{(k)} \\
 a_1^{(k-1)} & a_2^{(k-1)} & a_3^{(k-1)} & \dots & a_k^{(k-1)} & \\
 & a_1^{(k-2)} & a_2^{(k-2)} & a_3^{(k-2)} & \dots & a_{k-1}^{(k-2)} \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & a_1^{(1)} & & a_2^{(1)} & \\
 & & & & a_1^{(0)} & 
 \end{array}$$

Mivel feltettük, hogy az első sorban szereplő  $k + 1$  szám  $k$ -adrendű számtani sorozatot alkot, a legutolsó differenciasor tagjai mind egyenlők:

$$a_2^{(0)} = a_3^{(0)} = \dots = a_k^{(0)} = \dots = a_1^{(0)}.$$

Ez a differenciasor és az első tag (7) alapján egyértelműen megadja  $a_i^{(1)}$ -et, ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), ez meghatározza  $a_i^{(2)}$ -t, és így tovább visszafelé egyértelműen meghatározhatjuk végül az  $a_i^{(k)}$  sorozatot. Tehát tényleg elég egy  $k$ -adrendű számtani haladvány teljes és egyértelmű megadásához  $k + 1$  kezdőtag. Mivel lehetséges, hogy a megadott  $k + 1$  szám véletlenül egy  $k$ -nál alacsonyabbrendű számtani haladványban van, pontosan így fogalmazhatjuk eredményünket:  $k + 1$  tag egyértelműen meghatároz egy, legfeljebb  $k$ -adrendű számtani sorozatot. Ha pl.  $k + 2$  tagot vennénk fel tetszőlegesen, akkor a háromszög  $k + 1$ -edik sorában 2 tagot kapnánk:

$$\begin{array}{ccc}
 a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & a_3^{(1)}, \\
 a_1^{(0)}, & a_2^{(0)}. & 
 \end{array}$$

Ezek általában nem lennének egyenlők. Ha pedig  $a_1^{(0)} \neq a_2^{(0)}$ , akkor a  $k + 2$  szám nem lehet  $k$ -ad vagy alacsonyabbrendű számtani sorozat egy részlete.  $k + 2$ -nél több szám persze még kevésbé biztos, hogy egy legfeljebb  $k$ -adrendű számtani haladványhoz tartozik, hiszen ekkor a háromszög utolsó sorának még több elemét kapjuk. Ha meg  $k$  vagy annál kevesebb tetszőleges számot akarunk kiegészíteni egy, pontosan  $k$ -adrendű számtani sorozattá, akkor a háromszög  $k + 1$ -edik sorába már egyetlen elem sem kerül, s így azt tetszőlegesen választva, fel lehet építeni egy számtani sorozatot. Ekkor tehát sok megoldása van a feladatnak.

Okoskodásunk kezdetén érdemes volt beszélni az  $\binom{l}{k}$  ( $l = k, k + 1, k + 2, \dots$ ), alakú speciális számtani haladványokról, mert ezekből bármely számtani haladvány felépíthető. Ugyanis igaz, hogyha  $a_n^{(k)}$  egy tetszőleges  $k$ -adrendű számtani sorozat  $n$ -edik tagja, akkor

$$(8) \quad a_n^{(k)} = \alpha_0 + \alpha_1 \binom{n-1}{1} + \dots + \alpha_k \binom{n-1}{k} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ahol  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$   $n$ -től független állandók. (Itt, ha  $l < k$ , akkor  $\binom{l}{k}$  0-t jelent.) Az egyes számtani haladványok pusztán abban különböznek, hogy ezen  $\alpha_i$ -k más számok. Egy pontosan  $k$ -adrendű sorozatnál  $\alpha_k \neq 0$ .

(8)-at teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Ha  $k = 1$ , az elsőrendű számtani sorozat általános tagja

$$a_n^{(1)} = \alpha_0 + \alpha_1(n-1) = \alpha_0 + \alpha_1 \binom{n-1}{1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$\alpha_0$  és  $\alpha_1$  pedig a számtani sorozat kezdőtagja és differenciája. Most tegyük fel, hogy (8) helyességét már beláttuk az  $l - 1$ -edrendű sorozatokra: tehát, a konstansokat  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ -lel jelölve

$$(9) \quad a_m^{(l-1)} = \alpha_1 + \alpha_2 \binom{m-1}{1} + \dots + \alpha_l \binom{m-1}{l-1} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Határozzuk meg  $l$ -edrendű számtani sorozatunkat  $a_i^{(l)}$ -t kezdőtagjával és elsőrendű differenciasorával. (7) alapján

$$a_n^{(l)} = a_1^{(l)} + a_1^{(l-1)} + a_2^{(l-1)} + \dots + a_{n-1}^{(l-1)}.$$

Az  $a_i^{(l-1)}$  sorozat  $(l-1)$ -edrendű számtani sorozat, s így előállítható (9) alakban.  $m$  helyett rendre  $1, 2, 3, \dots, n-1$ -et írva kapjuk  $a_n^{(l)}$ -re, hogy

$$a_n^{(l)} = a_1^{(l)} + \alpha_1(n-1) + \alpha_2 \left[ \binom{0}{1} + \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \dots + \binom{n-2}{1} \right] + \dots + \\ + \alpha_1 \left[ \binom{0}{l-1} + \binom{1}{l-1} + \binom{2}{l-1} + \dots + \binom{n-2}{l-1} \right].$$

A szögletes zárójelben levő összegeket az előzőkben bizonyított (6) összefüggés segítségével sokkal egyszerűbb alakra hozhatjuk. Általában vegyünk egy ilyen alakú összeget

$$\binom{i}{r} + \binom{i+1}{r} + \binom{i+2}{r} + \dots + \binom{j}{r}.$$

Ennek egy tetszőleges  $\binom{p}{r}$  tagjára (6) szerint

$$\binom{p}{r} = \binom{p+1}{r+1} - \binom{p}{r+1}.$$

Sorra  $i, i+1, i+2, \dots, j$ -t írva  $p$  helyére a fenti összeg így írható

$$\binom{i+1}{r+1} - \binom{i}{r+1} + \binom{i+2}{r+1} - \binom{i+1}{r+1} + \binom{i+3}{r+1} - \\ - \binom{i+2}{r+1} + \dots + \binom{j+1}{r+1} - \binom{j}{r+1} = \binom{j+1}{r+1} - \binom{i}{r+1}.$$

Ebből a fenti összeget megkapjuk, ha  $i$  helyett  $0$ -t,  $j$  helyett  $n-2$ -t,  $r$  helyett pedig rendre  $1, 2, 3, \dots, l-1$ -et teszünk. Ekkor az összes kivonandóból  $0$  lesz, s így a zárójelekben sorra

$$\binom{n-1}{2}, \binom{n-1}{3}, \dots, \binom{n-1}{l}$$

áll, vagyis

$$a_n^{(l)} = a_1^{(l)} + \alpha_1 \binom{n-1}{1} + \alpha_2 \binom{n-1}{2} + \alpha_3 \binom{n-1}{3} + \\ + \dots + \alpha_l \binom{n-1}{l},$$

tehát  $a_1^{(l)}$ -et kell  $\alpha_0$ -nak választani, s akkor megkaptuk  $a_n^{(l)}$  várt előállítását. Ezzel bebizonyítottuk (8)-at.

Az  $\alpha$ -k meghatározása az első  $k+1$  tag ismeretében egy egyenletrendszer megoldására vezet, amit azonban könnyű megoldani, mert az egymásutáni egyenletekben mindig csak egy-egy újabb ismeretlen lép fel. Vegyük pl. az  $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$  sorozatot. Könnyű belátni, hogy ez másodrendű számtani sorozat, tehát

$$a_n^{(2)} = n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \binom{n-1}{1} + \alpha_2 \binom{n-1}{2}$$

alakban állítható elő. Véve az első három tagot

$$1^2 = \alpha_0,$$

$$2^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \binom{1}{1} = \alpha_0 + \alpha_1,$$

$$3^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \binom{2}{1} + \alpha_2 \binom{2}{2} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2.$$

$$\alpha_0 = 1; \quad \alpha_1 = 2^2 - \alpha_0 = 3; \quad \alpha_2 = 3^2 - \alpha_0 - 2\alpha_1 = 2.$$

Így nyertük a következő azonosságot:

$$n^2 = 1 + 3 \binom{n-1}{1} + 2 \binom{n-1}{2}.$$

Ha valamely  $l$  index után minden  $\alpha$  nulla:  $\alpha_{l+1} = \dots = \alpha_k = 0$ , az első  $(k+1)$  tag csak  $l$ -edrendű számtani haladványt határoz meg.

Legyen az  $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}, \dots$  az adott sorozat, a (8) szerinti előállításban a konstansok  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k+1}$ , tehát

$$a_n^{(k)} = \alpha_1 + \alpha_2 \binom{n-1}{1} + \alpha_3 \binom{n-1}{2} + \dots + \alpha_{k+1} \binom{n-1}{k}.$$

A sorozat egyre több tagjának az összegéből álló sorozat egy  $k+1$ -edrendű számtani sorozat, melynek az adott sorozat a differenciasora. Illetőleg még egy 0-t kell az új sor elejére írunk, mert különben differenciasora csak a második tagtól kezdve adja ki az eredeti sort.

Ez az első tag és a differenciasor mostmár meghatározza az új  $s_1 = 0, s_2 = a_1^{(k)}, s_3 = a_1^{(k)} + a_2^{(k)}, \dots, s_{n+1} = a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + \dots + a_n^{(k)}$   $k+1$ -edrendű számtani sort.

Keressük most meg ennek a (8) típusú előállítását. A fenti teljes indukciós bizonyítás ehhez szintén ad segítséget, ugyanis ha megnézzük, azt is mutatja ez a bizonyítás, hogy egy sorozathoz tartozó konstansokat, ha a differenciasor konstansait már ismerjük, úgy kapjuk, hogy ugyanezeket vesszük, csak még eléjük írjuk elsőnek az adott sor első tagját. Mivel esetünkben ez 0, így a számtani sorozat összegét így kapjuk:

$$(10) \quad s_{n+1} = a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + \dots + a_n^{(k)} = \alpha_1 \binom{n}{1} + \alpha_2 \binom{n}{2} + \dots + \alpha_{k+1} \binom{n}{k+1},$$

ahol  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$  az összegezendő sor (8) típusú előállításához szükséges állandók.

Számítsuk ki például eredményünk segítségével az első  $n$  szám négyzetösszegét. Láttuk, hogy a négyzetszámok sorozata másodrendű számtani haladvány. Tagjai  $n^2 = 1 + 3 \binom{n-1}{1} + 2 \binom{n-1}{2}$  alakban állíthatók elő. Így (10) szerint

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = 1 \cdot \binom{n}{1} + 3 \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} = \\ &= n + 3 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

vagy ha felbontjuk a zárójeleket

$$s_{n+1} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Ez a harmadrendű számtani sorozat és nyilván bármely másik is éppen harmadfokú polinomkifejezéssel állítható elő. Érdekes, hogy annak ellenére, hogy az együtthatók törtek, a kifejezés jelentése szerint a polinom értéke minden pozitív egész értéknél egész értéket vesz fel.