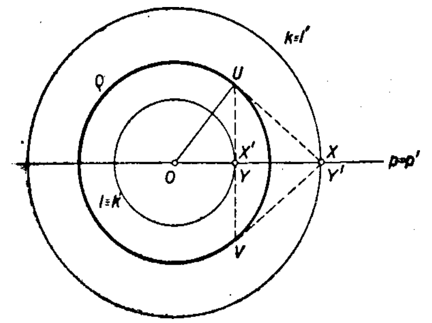
VI.

Folytatom az első közleményben már megpendített, termékeny gondolatnak – a körre való tükrözés fogalmának a kiaknázását. Az egyenesre való tükrözéssel összehasonlítva fogjuk végigvizsgálni a körre való tükrözés sajátságait. Hogy a tükröző tengely szerepéhez hasonló szerepet játszó, ú. n. *vezérkör* sugarának a hosszát ne kelljen mindig külön megmondani, válasszuk a távolságmérés *egységének*, s legyen a vezérkör állandó jelölése ϱ. Ha a tárgypontot X-szel jelöljük, X' jelölje a képét. Az egységsugarú vezérkör folytán

$$OX \cdot OX' = 1, \quad \text{vagyis} \quad OX' = 1/OX.$$

Tehát a kép O-tól való távolsága a tárgy O-tól való távolságának *reciprok értéke;* a pontot a képével összekötő egyenes az O ponton megy át.[1] Akár ezt a két tulajdonságot is választhatjuk a körre való tükrözés definíciójának.

Az egyenesre való tükrözés a tárggyal egybevágó képet létesít. De azt még tegyük hozzá, hogy a tárgy körüljárási menetét a tükrözés a képen ellenkezőre fordítja. (Az óramutató a tükörképen visszájára forog). A „tükrözés”-t a geometria megfordítható fogalommá tágítja, mert ha X pontnak X' a tükörképe, akkor azt mondjuk, hogy az $Y \equiv X'$ pontnak az $Y' \equiv X$ pont a tükörképe. A tárgy és kép megfordítható szerepe a tükrözés egyik lényeges sajátsága.



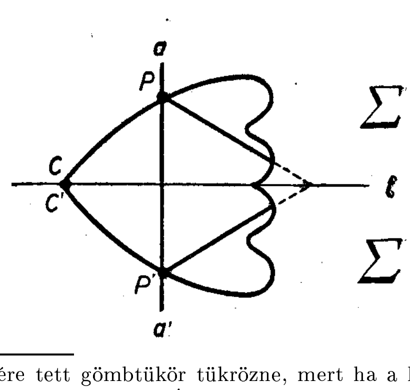
10. ábra

Most tekintsük a ϱ körre való tükrözést, a közönséges tükrözés fenti tulajdonságait követi-e? Könnyű róla meggyőződni, hogy az egyenes vonal a képen elgörbül. (Erre még visszatérünk). Ezért a kép nem „hűségesen” tükrözi a tárgy sajátságait, hanem torzít. Azonban a tárgy és kép fölcserélhetősége ezt a tükrözést is jellemzi és ez éppen az $OX \cdot OX' = 1$ egyenlőségben jut kifejezésre.

Az egyenesre való tükrözés esetében a sík bármelyik pontjának van képe és olyan pont is van – a tükröző egyenes pontjai azok – melyik egybeesik a képével. Az ilyen pontot *fixpontnak* nevezzük; ezzel utalunk arra, hogy a tárgypontot nem más pontra cseréli át a tükrözés, hanem ő maga a képe is.

A ϱ körre való tükrözés esetében, az *O pont kivételével,* ugyancsak mondhatjuk, a sík bármely pontjának van képe. Az O pontnak nincs képe. Mert $O \equiv X$ esetében $OX = 0$. Ha bármely OX' távolság 0-szorosát vesszük is, 0-t nyerünk, nem pedig az 1-et. Szoktuk ezt úgy is mondani, hogy ha a pont egy egyenes mentén az O ponthoz tart, a képe ugyanazon az egyenesen távolodik és mire a tárgypont az O-ba érkezik, a képe kifut a *végtelenbe. Egyelőre óvatosan bánjunk ezzel a kifejezéssel!* (A matematika nem tűri a szavakkal való játékot. Csak olyan szavakat és kifejezéseket használ, aminek élesen és félreérthetetlenül fogjuk az értelmét). A körre való tükrözésnek is vannak fixpontjai, a tükröző körvonal pontjai azok; különben a ϱ kör belső pontjainak külső, külső pontjainak belső képpontok felelnek meg. Már ez a sajátság önmagában is figyelmeztet a torzulásra, hiszen a véges belső tartománynak a végtelen külső tartomány a képe.

Az egyenesre való tükrözéshez könnyen csinálhatunk olyan alakzatot, amelynek a tükörképe önmaga. A tükröző t tengely $\sum$ és $\sum'$ félsíkokra bontja a síkot. Válasszunk tetszőleges alakzatot a $\sum$ félsíkon és forrasszuk egybe a $\sum'$ félsíkon keletkezett képével.



[1]Ez nem az a tükrözés, ahogyan a kör helyére tett gömbtükör tükrözne, mert ha a kör domború részét képzeljük tükörnek, akkor a tárgytávolságra és képtávolságra $1/t+1/k = 1/(OX-1)+1/(OX'-1) = 1/(OX-1)+1/(1/OX-1) = 1/(OX-1)+OX/(1-OX) = -1$; ha pedig a hátsó homorú felületet képzeljük tükörnek, akkor $1/t+1/k = 1/(OX+1)+1/(1/OX+1) = 1$. Mindkét képlet az $r-2$ sugarú gömb tükör képalkotásának felelve meg. Rámutattunk azonban első közleményünkben azokra az analógiákra az egyenesre való tükrözéssel, amik indokolják mégis a „tükrözés a körre” elnevezést.

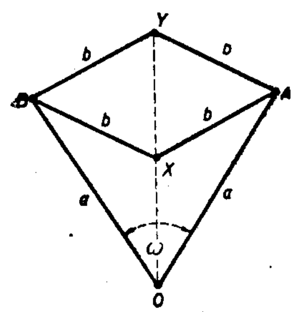
11. ábra

Nyilvánvaló, hogy az összetett alakzatnak önmaga a képe. De nem áll mégsem csupa fixpontból, mint a t tengely. Az ábra alakzatának C pontja fixpont, $C \equiv C'$ de a P pontja már nem fixpont, $P' \not\equiv P$. Azonban az alakzat bármely pontjának a képe ugyancsak pontja az alakzatnak. Az ilyen alakzatot *invariáns alakzatnak* nevezzük. Az ábra $a \equiv a'$ egyenese, mely a t-re merőleges, invariáns egyenes. Azok, de csakis azok a körök, melyeknek a középpontja a t tengelyen van, invariáns körök.

A felsorolt fogalmaknak megvan a megfelelője a körre való tükrözés esetében is. A $\sum$ és $\sum'$ most jelentse a tükröző ϱ kör belső és külső tartományát. Válasszunk belső alakzatot és forrasszuk egybe a képével, a képe nyilván külső alakzat. Így invariáns alakzatot nyerünk. A ϱ kört derékszögben metsző kör és az O ponton átmenő egyenes invariáns kör és invariáns egyenes. (Az V. pontban a tükrözés fogalmának a körre való tükrözéssé tágítása, éppen az invariáns kör segítségével sikerült).

VII.

Szerkeszthetünk olyan műszert is, amely automatikusan megrajzolja bármely alakzatnak a körre való tükörképét. A műszer nagyon szellemes és egyszerű. Csuklósan összekapcsolt rudakból áll. Egyik pontját végig vezetjük a tárgyalakzat pontjain, azaz leírjuk vele a tárgyalakzatot. A leíró mozgást a csuklós szerkezet átveszi és egy más pontja éppen a képalakzatot leíró mozgással követi.

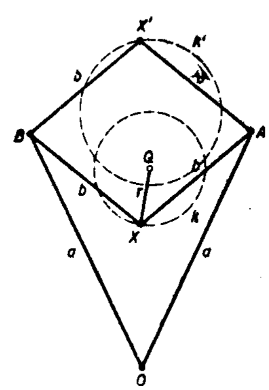


12. ábra

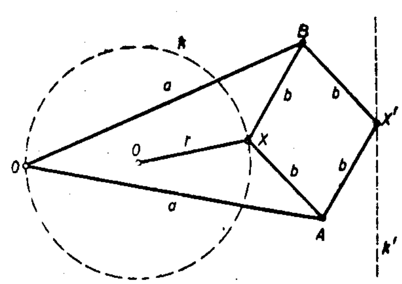
Én most olyan feladatokat sorolok fel, hogy a megoldásuk folyamán magatok igazolhatjátok, hogy a 12. ábrán látható szerkezet egy ilyen műszer.

8. feladat. Bizonyítsátok be, hogy az ω-tól nem függ az $OX \cdot OY$ szorzat. Vagyis az ábra $OA = OB = a$, $AX = BX = AY = BY = b$ rögzített méretezése mellett az ω még szabadon változtatható, de az $OX \cdot OY$ szorzat csak az a és b-től függ.

9. feladat. Rögzítendő a 13. és 14. ábra $OA = OB = a$, $AX = BX = AX' = BX' = b$, $QX = r$ méretezése, az O és a Q pont, akkor még az A, B, X, X' pontok mozoghatnak. Bizonyítsátok be, hogy ha X egy k kört ír le, akkor az X' kört vagy egyenest ír le.



13. ábra



14. ábra

Kört ír le, ha k nem megy át a rögzített O ponton; egyenest ír le, ha k átmegy az O-n.

E két feladatból nyilvánvaló, hogy a 12. ábra valóban egy kívánt tulajdonságú szerkezetet mutat. Hat lapos rúd csuklós összekapcsolása. Az O pontját rögzítve, X a tárgyírópontja és Y a képíró pontja. Egyben bebizonyítottátok, hogy ennél a tükrözésnél a kör tükörképe kör vagy egyenes.

10. feladat. Bizonyítsátok be, hogy ha az X pont szöget ír le, az Y pont vele egyenlő szöget ír le.

Természetesen a szöget most a már mondott, tágabb értelemben vesszük, vagyis akár görbék metszéspontjában a görbék alkotta szög is lehet.

A felsorolt három feladatban éppen a körre vonatkozó tükörkép jellemző tulajdonságai bontakoznak ki. A csuklós szerkezettől függetlenítve is kifejezzük ezeket a tulajdonságokat.

Mondottuk már, hogy a kép torzítva mutatja a tárgyat, s a 9. feladatban fejeződik ki a torzítás módja. Nevezetesen az egyenes a képen körré görbül. Már a II. pontban említettük, hogy a körök közé besorolhatjuk az egyenest is; azt mondjuk, hogy az egyenes végtelen nagy sugarú kör. Ennek a felfogásnak az a haszna, hogy a 9. feladat tartalmát egyetlen átfogó tételbe sűríthetjük. *A körre vonatkozó tükrözés körtartó leképezés.* Ami azt jelenti, hogy körnek kör a képe.

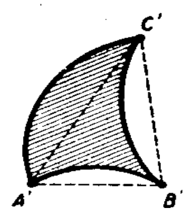
Ha mégis részletezni kívánjuk a tétel tartalmát az egyenes szempontjából is, akkor tegyük hozzá a következő megjegyzést. *Az egyenes képe a vezérkör középpontján átmenő kör és a vezérkör középpontján átmenő kör képe egyenes.*

A 10. feladat tartalmát még a következő tételben is ki lehet fejezni. *A körre vonatkozó tükrözés szögtartó leképezés.*

Ebből a szögtartásból a kép torzításának egy különös sajátságára következtethetünk. Legyen az ABC tetszőleges háromszögnek $A'B'C'$ a képe. A képháromszög oldalai a mondottak szerint körívek, mégpedig a vezérkör középpontján átmenő három körnek egy-egy íve. E körháromszög szögei α' β' γ' a tárgyháromszög szögeivel, azaz rendre az α, β, γ-val egyenlők. Az $A'B'C'$ húrháromszög szögei az α^*, β^*, γ^* általában mások. Azonban, ha az ABC háromszög oldalai nagyon kicsinyek a vezérkörhöz képest, akkor az $A'B'C'$ húrháromszög oldalai is, meg az $A'B'C'$ körháromszög oldalai is nagyon kicsinyek. Sőt az $A'B'$ ív és $A'B'$ húr „majdnem" egybevág, hasonlóképpen a másik két oldalra is mondhatjuk. Tehát a körháromszög a hozzátartozó húrháromszöggel „majdnem" egybevágó, amiből következik, hogy

$$\alpha = \alpha^*,\ \beta = \beta^*,\ \gamma = \gamma^*$$

szögegyenlőségek is „majdnem helyesek". Eszerint az ABC tárgyháromszög és az $A'B'C'$ képháromszög „majdnem hasonló."



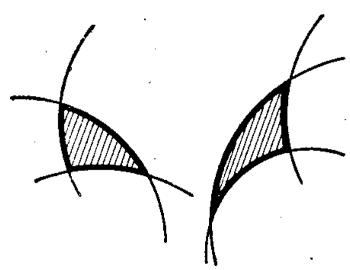
15. ábra

Minél jobban zsugorodik a tárgy háromszög, annál inkább válik „pontossá" a „majdnem". Szokás ezt úgy is mondani, hogy a körre vonatkozó tükrözés *kicsinyben hasonlóság,* sőt az ilyen leképezése külön műszó is van: *konformis leképezés.* (Persze itt csak röviden és egész pontatlanul mondtunk el valamit, ami a matematika nyelvén pontosan is megfogalmazható és aminek a mondottak a szemléletes magja.)

Ezzel kapcsolatban is említek egy feladatot, de nem a körre vonatkozó tükrözés fogalma, hanem a görbevonalú idom fogalma miatt.

Tekintsük az olyan körháromszögeket, amelyeknek az oldalait szolgáltató teljes körök hatványpontja mindhárom körhöz képest külső pont. Az ilyen körháromszögről szól a következő feladat.

11. feladat. Bizonyítsátok be, hogy a kétszer domború egyszer homorú, ill. a kétszer homorú egyszer domború körháromszög szögeinek összege nagyobb ill. kisebb 180°-nál. (16. ábra.)



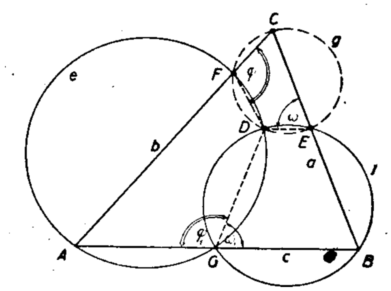
16. ábra

VIII.

Megjegyzem még, hogy a körre vonatkozó tükrözést a körre vonatkozó *inverziónak* is, valamint *reciprok rádiuszok szerint való leképezésnek* is nevezik, a bemutatott műszert pedig inverzornak. Kezdetben azért nem használtam ezeket az elnevezéseket, mert éppen a *tükrözés* szó gondolatot ébresztő erejét akartam kiaknázni. Láthattátok, hogy a matematikában az elnevezés szerencsés megválasztása mennyire lényeges szerepet tölt be. Hasonlóképpen a jelölés, az írásmód alkalmas megválasztása is termékenyen hat a matematikai gondolkodásra. Elég arra hivatkoznunk, hogy a tíz jeggyel s helyi értékkel való mai írásmódunknak köszönhető, hogy ma az iskolás gyermek is többet tanul és tud számtanból, mint amennyit ennek az írásmódnak az elterjedése előtt az egyetemen tanítottak.

Most pedig bemutatom, hogy az inverzió az alkalmazások terén is hasznosnak mutatkozik. A kutatásnak, a szerkesztésnek, a bizonyításnak is termékeny eszköze. Azt hiszem egyetlen példa és néhány kitűzött feladat is megmutatja az inverzió alkalmazásának módszerét és értékét.

Az ABC háromszöghöz két kört írjunk úgy, hogy az egyik az A, a másik a B ponton haladjon át és az egyik közös pontjuk az AB egyenesen legyen.



17. ábra

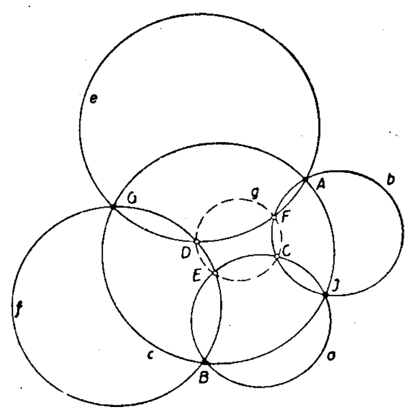
A 17. ábrán az e és f körökről és a G pontról van szó. Az e kör az AC egyenest, f a BC egyenest még az F, illetve az E pontban metszi és a másik közös pontjuk a D.

A húrnégyszög, de csak a húrnégyszög jellemző tulajdonsága az, hogy a négy szöge közül két szemköztesnek az összege 180°. Ezen az alapon egyrészt $\varphi = \varphi_1$, $\omega = \omega_1$ másrészt – ebből az $\omega + \varphi = \omega_1 + \varphi_1 = 180^\circ$ miatt – az $EDFC$ húrnégyszög volta következik. Az ábrán g-vel jelöljük az $EDFC$ köré írt kört. Minthogy E, F, C pontok már meghatározzák a g kört, a következő különös tételre találtunk.

Ha az e, f, g *körök rendre átmennek az* A, B, C *pontokon* és az e, f; f, g; g, e *párok egyik közös pontján rendre átmennek az* $AB \equiv c$, $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ *egyenesek, akkor a három körnek van közös pontja* (a D pont).

A körre való tükrözéssel ebből a különös tételből egy általánosabb tételre találunk, melynek ez a tétel csupán különös esete.

A 17. ábra síkján válasszunk olyan ϱ vezérkört, melynek a középpontja az ábra vonalaira ne illeszkedjék. A ϱ körre való tükrözés nem csak a köröket, hanem az a, b, c egyeneseket is körré alakítja, mégpedig olyan körökké, melyek átmennek ϱ kör középpontján. Így az a, b a b, e, az e, f az f, a körök egy-egy metszéspontja a c körre esik. Olyan képet nyerünk, mint a 18. ábra hat körből álló konfigurációja.



18. ábra

Fordítsuk meg a dolgot. *Írjunk öt kört úgy, hogy az* a, b, c; b, c, e; c, e, f; f, c, *a körhármasoknak legyen közös pontja. Azt állítjuk, hogy az* a, b; b, e; e, f; f, *a körpárok másik közös pontja egy hatodik körön sorakozik (a 18. ábra* g *körén.)*

A bizonyítást a fenti megjegyzés szinte diktálja. Az I középpont köré olyan vezérkört írjunk, mely metszi az a, b, c köröket, (ez a metszési kikötés csak annak lényeges, aki rajzon kíséri a mondanivalónkat.) E körre való tükrözés az a, b, c, köröket egyenessé alakítja; (nevezetesen az a, ϱ; b, ϱ; c, ϱ körpárok húrjai képviselik a szóban forgó egyenesek egy-egy szakaszát.) A d, e, körök képe azonban ugyancsak kör lesz.

Tehát a tükörkép olyan konfiguráció, mint amilyen a 18. ábrán az a, b, c, e, f vonalak konfigurációja. Minthogy a tükörképen a C, F, D, E pontok egy g körön vannak – a fentebb levezetett tétel szerint – tehát az inverzió körtartó volta miatt, a 18. ábrán szereplő tárgyalakzaton is egy körön kell a C, F, D, E-nek sorakoznia.

A bemutatott „kutató módszer”, valamint a „bizonyítási eljárás” lényege a következő. Egyenesre szóló különös állítást, alkalmas inverzióval körökre is érvényes állítássá tágítjuk. Hasonló szellemben bizonyos, körre vonatkozó szerkesztési feladatokat egyszerűbb, egyenesekre vonatkozó feladatokra való visszavezetés közvetítésével lehet megoldani.

Kitűzött feladatok.

Bizonyára tudjátok már, hogyan lehet két egyenest érintő és egy ponton átmenő, illetőleg két egyenest és egy kört érintő kört szerkeszteni. Ezeknek is hasznát vehetitek a következő feladatok megoldásával.

12. Adva van, három kör, melynek egy közös pontja van. Szerkesszetek kört, mely a három megadott kört érinti.

13. Adva van három kör, melyek közül kettőnek van közös pontja. Szerkesszetek kört, mely mindhárom kört érinti.

14. Tetszőlegesen megadott három körhöz szerkesszetek érintő kört.

15. Fejezzétek ki az (x, y) pont $x^2 + y^2 = 1$ körre vonatkozó tükörképének, (x', y')-nek a koordinátáit az x, y segítségével.

16. Határozzátok meg az ellipszisnek, a hiperbolának a főkörre vonatkozó tükörképét, (egyenletét).

17. A parabola csúcspontja köré írjatok a fókuszon átmenő kört. Tükrözzétek a parabolát erre a körre nézve (egyenlet!).