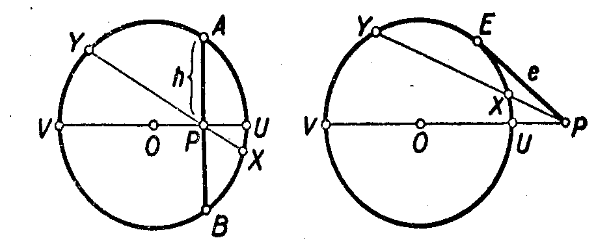
I.

Részben ismeretes tételeket tárgyalok a következőkben. Síkgeometriai összefüggéseket tárgyalok, s az okoskodásokból igyekezem minimálisra, zsugorítani az aritmetikai ízű meggondolásokat.

Legyen adott a k kör és a külső, vagy belső P pont. Vegyük P ponton át azt a szelőt, mely a kör középpontján megy át és legtávolabb eső pontja, a rövid PU és hosszú PV szelvényt létesíti. Bármelyik irányban forgatjuk a szelőt P pont körív, a hosszú szelő egyre rövidebb, a rövid egyre hosszabb lesz, sőt egy pillanatban PX és PY egyenlővé válik. Belső pontra nézve a PO egyenesre merőleges állásban következik be az egyenlőség: $PA = PB$.



1. ábra

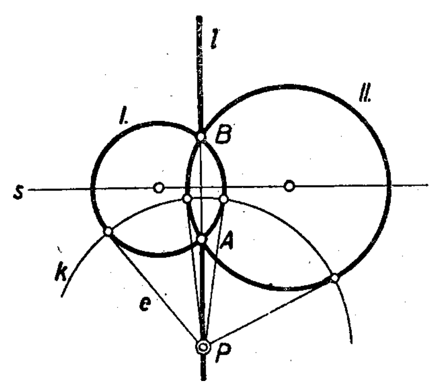
Külső pontra nézve pedig az érintkezés pillanatában: $PE = PE$. Jelölje PA, ill. PE távolságot röviden h, ill, e. Bár a forgás közben a rövid szelvény növekedett, a hosszú meg fogyott, a szorzatuk állandó maradt. Mégpedig, bizonyára, már tanultátok,

$$PX \cdot PY = h^2, \qquad \text{ill.} \qquad PX \cdot PY = e^2. \tag{1}$$

A belső, illetőleg külső pontra vonatkozó h^2, ill. e^2 mennyiséget *a pont körre vonatkozó hatványának* nevezzük. A szelő rövid és hosszú szelvénye szorzatának az állandóságát, az (1.) alatti egyenleteket, hasonlósági következtetések révén tanultátok bizonyítani. (Tudniillik $PAY \sim PXB$, $PEY \sim PXE$ hasonló háromszögek).

II.

Két kör közös húrjának nevezetes tulajdonságát találjuk a pont hatványának fogalma révén.
A 2. ábrán P pontot az AB húr egyenesén tetszőlegesen választottuk.



2. ábra

P pontból akár az I, akár a II körhöz írt érintő egyenlő $\sqrt{PA \cdot PB}$-vel, mert PA és PB szelvényeket akár az egyik, akár a másik körhöz viszonyítva tekinthetjük. P-ből a két körhöz négy egyenlő érintő ágazik. Az érintési pontok P középpont köré a $\sqrt{PA \cdot PB}$ sugárral írt k körön sorakoznak.

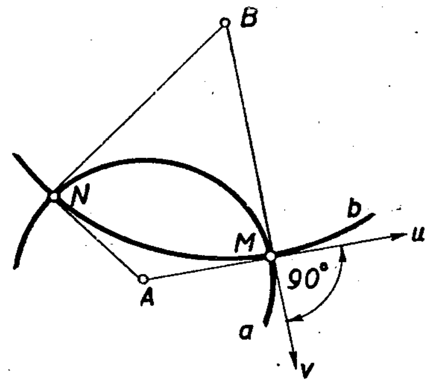
Ha P pont mozog az l egyenesen, a k kör is változik. Ha az A pont felé tart, a kör ponttá zsugorodik; ha távolodik A-tól, a kör az s egyenesé tágul. (Ha az AB belső szakaszon van a P pont, akkor nem ágazik ki belőle a körökhöz érintő, tehát nincs hozzátartozó k kör sem). Mozgás közben P pontnak a hatványa állandóan változik, de az I körre és II körre vonatkozó hatványa egymás között állandóan egyenlő marad, még akkor is, ha P belső pontja a két körnek. Ezért az, l egyenest *a két kör hatványvonalának* nevezzük.

Ha P pont lelép az egyenesről, más lesz a hatványa I körre, mint II. körre nézve. (Ha l-ről jobbra lelép a mi ábránkon, akkor az I-re vonatkozó hatványa a II-re vonatkozónál nagyobbá válik). Bizonyítsátok be, hogy ez így van! *1. feladat.)*

Most pedig az egymást metsző görbék hajlásszögének a forgalmát értelmezzük. Ennek a fogalomnak a bevezetése a hatványvonal fogalmának hasznos átfogalmazásához vezet.

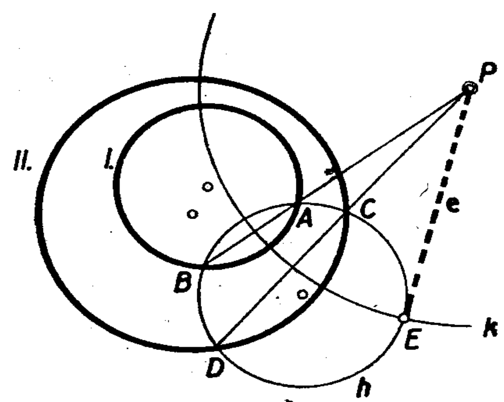
Két görbe, g_1 és g_2 messe egymást az M pontban. Legyen e_1 és e_2 az érintőjük ebben a pontban. Nevezzük el az e_1, e_2 egyenesek hajlásszögét a *görbék M pontban alkotott hajlásszögének.* Ha a két egyenes merőleges egymásra, azt mondjuk, hogy a két görbe merőleges egymásra az M pontban. Ha a kör és b kör merőlegesek egymásra az M-ben, bármelyikük M pontbeli érintője a másiknak a középpontján megy át.

Pillantsatok vissza a 2. ábra k körére. Tüstént megértitek, hogy k kör az I, II köröket derékszögben metszi. Sőt az *A B pontokat összekötő végtelen sok kör bármelyikét derékszögben metszi.* (Ugyanis II kör helyett vegyük a végtelen sok kör bármelyikét, de tartsuk meg az I kört). Így a két kör hatványvonalát olyan módon is értelmezhetjük, mint az őket *derékszögben metsző körök középpontjának geometriai helyét.*



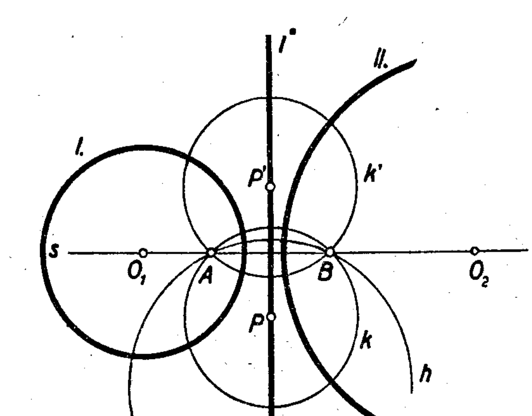
3. ábra

Sőt ezáltal tágítható a hatványvonal fogalma, az egymást nem metsző körök esetére nézve is. Az egymást nem metsző körökhöz mindig található alkalmas k kör, mely mind a kettőt metszi, Az AB és CD egyenesek közös P pontjából h-hoz érintőt írunk, ennek a hossza $PE = e$.



4. ábra

Az I, k körpárra tüstént érthető, hogy P-ből e-vel egyenlő érintőpár ágazik az I-hez. A II, k körpárra nézve pedig az, hogy P-ből a II-höz ágazik két érintő, amelyek akkorák mint e. Eszerint P köré e sugárral írt k kör derékszögben metszi mind az I, mind a II kört. Tehát az így nyert P pont az I, II pár hatványvonalának egy pontja. Bebizonyítjuk, hogy a hatványvonal ebben az esetben is a két kör közös szimmetria tengelyére merőleges egyenes.



5. ábra

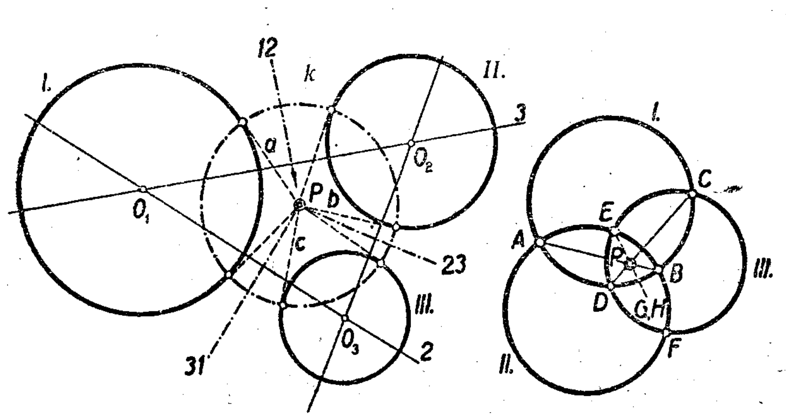
Legyen P az előbb mutatott eljárás szerint szerkesztett pont és k a köréírt, derékszögű kör az I, II-höz képest. Tükrözzük a k kört s egyenesre. Az így nyert, k' kör szintén derékszögben metszi I és II kört.

Minthogy pl. I a k ,k' körpárt derékszögben metszi, az A, B pontokon átmenő körsor mindegyik körét derékszögben metszi. Ugyanez áll II-re is. Tehát az A, B pontokon átmenő körök mind derékszögűek az I és II-höz, vagyis a szóbanforgó körsor középpontjait sorakoztató l egyenes, az AB felező merőlegese, az I és II kör hatványvonala.

Érintkező körök hatványvonala pedig nyilvánvalóan a közös pontjukhoz tartozó közös érintőjük.

III.

Három kör, I, II, III három párt értelmez: (I, II); (II, III); (III, I). A három pár pedig három hatványvonalat: a 12-, 23-, 31-et. *Ez a három egyenes egy P pontban, a három kör hatványpontjában találkozik* (6. ábra).



6. ábra

Azért nevezzük hatványpontnak, mert ennek a pontnak mind a három körre vonatkozó hatványa ugyanaz. Ha P külső pont, akkor a belőle kiágazó hat érintő egyenlő. Érintési pontjuk a P középpont köré írt k körön sorakozik. Ez a kör az I, II, III köröket merőlegesen metszi.

A tétel bizonyításához a 6. ábra első képe szemlélteti a viszonyokat. Egymást nem metsző körök esete. Jelölje P a 23 és 31 hatványvonalak metszéspontját, Akkor P-ből két-két egyenlő érintő ágazik a három körhöz, hosszúságukat jelölje rendre a, b, c. A 23 egyenes II és III körök hatványvonala, ezért $b = c$. A 31 egyenes a III és I köröké, ezért $c = a$. Tehát $c = b$ is igaz, amiből éppen az következik, hogy a harmadik hatványvonal, az 1 2 is tartalmazza a P pontot.

Ugyanezzel a meggondolással a körök bármely kölcsönös helyzetének esetében megy a bizonyítás, csak arra az egy esetre, nem, ha a körök bármely ketteje metszi egymást és a közös húrok metszéspontja a körök belsejében van. Tudniillik a tétel ebben a kiemelt esetben is igaz, de a P ekkor a körök közös húrjainak metszéspontja, s így mind a három körre nézve belső pont. Nem ágazik belőle a körökhöz érintő és nem írható köré a három kört merőlegesen metsző kör. Csak az érvényes ebben az esetben is, hogy mind a három körre nézve P pontnak a hatványa ugyanakkora.

Ennek az esetnek a szemléltetésére való a 6. ábra másik képe. Az AB és CD közös pontját jelölje P. Kössük E pontot össze a P-vel. Nem hisszük, hogy ez az egyenes az F ponton is átmegy. (Ha elhinnők, nem szorulna bizonyításra). Tehát EP két különböző pontban metszi a II és III kört, jelöljük ezeket G- és H-val.

A PA, PB és PC, PD szelvények az I körben vannak és így az I.-ben mondottak szerint

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Hasonlóképen a II körből

$$PA \cdot PB = PE \cdot PG$$

és a III körből

$$PC \cdot PD = PE \cdot PH.$$

E három egyenlőség alapján

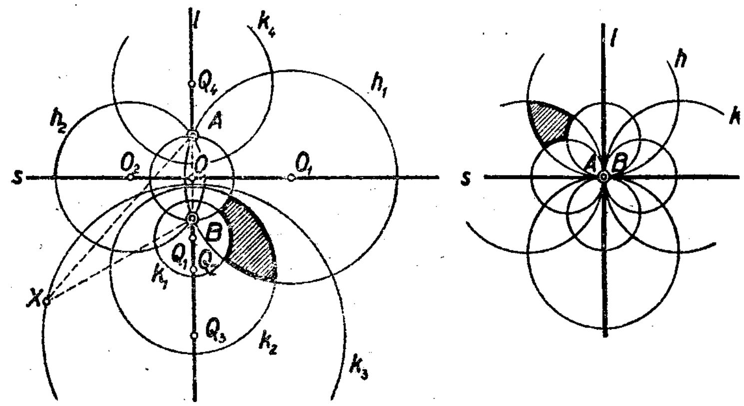
$$PE \cdot PG = PE \cdot PH,$$

$$\text{azaz} \qquad PG = PH.$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy G és H ugyanaz a pont. Ámde EP egyenes a II és III kört csak akkor metszheti egybeeső pontokban másodszor is, ha éppen az F ponton megy át. Ezt nem akartuk hinni, de most már beláttuk, hogy igaz.

IV.

Ismeritek a. *körsor* elnevezést, tanultátok, hogy két ponton át számtalan kör írható, ezeknek az összességét nevezzük körsornak.



7. ábra

Az A, B pontokon át írható körsor *tengelye* az AB egyenes felezőmerőlegese, az s, *hatványvonala* az A és B pontot összekötő l egyenes, *alappontjai* az A és B pont. A körsor legkisebb körének AB az átmérője. Végtelen nagy köre is van, mert az s tengelyen a kör középpontja akár jobbra, akár balra távolodik a h_n kör, az l egyenessé tágul.

Most új fogalmat vezetünk be, az A és B pontokhoz tartozó APOLLONIUS-*féle körsort.* Az elnevezést megvilágítom egy bizonyításra kitűzött feladat révén. Ismeritek a következő tételt. Ha λ előírt aránymutató és A, B megadott pontok, akkor az

$$AX : BX = \lambda$$

kirovást teljesítő X pontok geometriai helye kör. Az A és B ponthoz tartozó, λ aránymutatójú APOLLONIUS kör.

Bizonyítsátok be, hogy az A es B pontokon át írható kör sort derékszögben metsző k kör az A, B pontokhoz tartozó egyik APOLLONIUS *kör. (2. feladat.)*

Az s tengelyt, A és B alappontokon átmenő körsort derékszögben metsző (k) körök összességét az A, B *pontokhoz tartozó* APOLLONIUS-*féle körsornak* nevezzük. Van két ponttá zsugorodott köre: A és B nullkör. Van egyenessé tágult köre: ez az s egyenes. A körsor *tengelye az l egyenes és hatványonala az s* egyenes.

A két ponton át írható körsor köreinek megrajzolása egyszerű rajzi munka. Az A, B pontokhoz tartozó APOLLONIUS-féle körsor köreinek megrajzolásához megadható-e egyszerű rajzi utasítás? Igen. Legyen az AB átmérőhöz tartozó kör h és az átmérő egyenese l. Az l egyenes tetszőleges Q pontja, mint középpont, s a belőle h-hoz vezetett érintő, mint sugár meghatároz egy k^n kört.

Az ábra s és l tengelyű körsora *derékszögű körhálózatot* alkot. (Bármely h kör bármely k kört derékszögben metsz). A kiragadott sötét idom derékszögű körnégyszög. Oldalai körívek, szögei derékszögek. Ha a körnégyszöget sűrűn rajzolt hálózatból vesszük, midőn oldalainak mérete AB távolsághoz képest elenyészően kicsinyek, a sötét parcella „majdnem” téglalap.

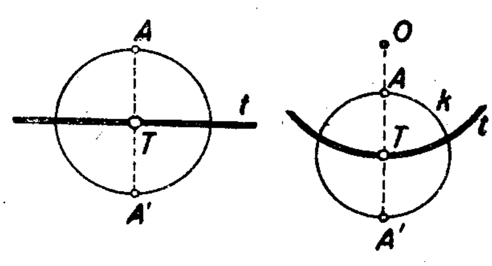
Ha A és B egybeesik, mindkét körsor egy pontban érintkező körökből áll. Egyik sor a másikból az $A = B$ pont körül való negyedfordulattal is származtatható. A 7. ábra második képe szemlélteti ezt a két különös körsort.

Könnyen belátható, hogy a sík bármelyik U pontján egy h és egy k kör megy át, azaz A és B kivételével minden pont egy s és l rendszerhez tartozó kör metszéspontjának tekinthető. (Bizonyítsátok be! *3. feladat.*)

A derékszögű körhálózat fontos szerepet játszik a térképészetben. A térképen látható hosszúsági- és szélességi körök, ilyen hálózatot alkotnak, az északi- és déli-sarkpont tölti be az A és B alappont szerepét.

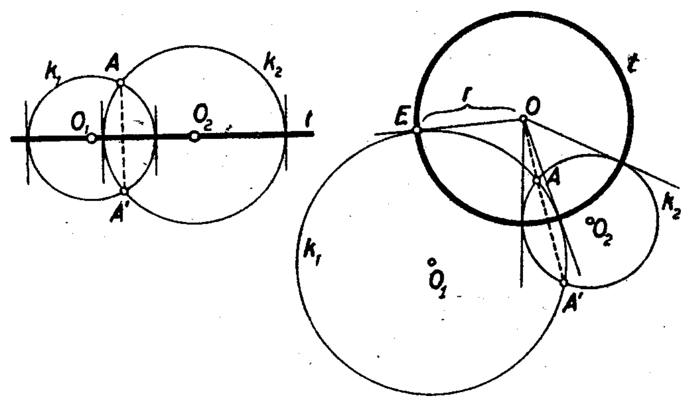
V.

Még egy fogalmat vezetünk be. A körre vonatkozó tükrözés fogalmát. Az egyenesre való tükrözés fogalmának tágításával nyerjük.



8. ábra

A fogalom tágításának egyik módját szemlélteti az ábra. A' pont A-nak a tükörképe t-re nézve. A második képen t szerepét egy kör, a reá bocsátott menőleges szerepét e kör egy sugara tölti be.



9. ábra

A fogalom tágításának egy másfajta módját szemlélteti a 9. ábra. Szerkesszétek meg A pont t egyenesre való tükörképét. Az egyenes egy-egy tetszőleges pontja köré kört írunk, mely A ponton megy át. A' két kör másik közös pontja az A' tükörkép. Ne felejtsétek el, hogy k_1 és k_2 merőlegesen metszi a t egyenest. Erre építjük a fogalom tágítását.

Vegye át t szerepét egy kör. Két hozzá derékszögű kör k_1 és k_2 az A és A' pontban metszi egymást. Most ezt a geometriai műveletet nevezzük el a körre vonatkozó tükrözésnek; *A' az A-nak t körre vonatkozó tükörképe.* Ha a kör sugara r, akkor pl, a k_1 körre a szelők tételét alkalmazva

$$OA \cdot OA = r^2.$$

Visszatekintve a 7. ábrára, ebben az értelemben mondhatjuk. hogy az A és B pontok, a hozzájuk tartozó Apollonius-körök bármelyikére nézve, egymásnak tükörképe.

Kitűzött feladatok:

4. – Legyen 1, 2, 3, 4, 5, 6 hat pont jele. Az 12, 34 és 56 találkozzék egy pontban. Ha 1 2 3 4 és 3 4 5 6 pontok egy-egy húrnégyszög csúcsai, bizonyítsátok be, hogy 5 6 1 2 is húrnégyszöget tűz ki.

Ez a térben is igaz, sőt a térben azt is hozzátehetjük. hogy a hat pont kőré gömb írható.

5. – Adva van k kör és A, B pontok. Szerkesztendő az A, B pontokon átmenő kör, mely a k kört érinti.

6. – Adva van ismét k és A, B. Szerkesztendő az A, B pontokon átmenő kör, mely a k kört derékszögben metszi.

7. – Tekintsük egy megadott háromszög oldalait, mint egy-egy kör átmérőjét. A hozzájuk tartozó három kör hatványpontja milyen összefüggésben van a háromszöggel?