Az alábbiakban közöljük az 1. számban kitűzött feladatok megoldását.

6. *Mutassuk meg, hogy ha a pozitív szám, akkor* $[2a] - 2[a]$ *értéke vagy* 0*, vagy* 1*.*

Megoldás: Ha a egész szám, akkor $2[a] = 2a$ és $[2a] = 2a$, tehát a vizsgálandó különbség $[2a] - 2[a] = 0$.

Ha a nem egész szám, legyen a benne foglalt legnagyobb egész szám: $[a] = a_0$, és így $a = a_0 + x$ ahol $0 < x < 1$. $2[a]$ értéke nem függ x-től, hanem bármely x-re $2[a] = 2a_0$ De $[2a]$ értékét már befolyásolja x értéke, ugyanis

$$[2a] = \big[2(a_0 + x)\big] = [2a_0 + 2x] = 2a_0 + [2x],$$

tehát

$$[2a] - 2[a] = 2a_0 + [2x] - 2a_0 = [2x].$$

Ha $2x < 1$, azaz $x < \dfrac{1}{2}$, akkor $[2x] = 0$, ha $1 \leqq 2x < 2$, azaz $\dfrac{1}{2} \leqq x < 1$, akkor $[2x] = 1$.

7. *Mutassuk meg, hogy* $\binom{2n}{n}$ *mindig egész szám.*

Megoldás: Határozzuk meg egy p prímszám kitevőjét a $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)}{(n!)^2}$ kifejezés számlálójában és nevezőjében. Ha az derül ki, hogy a számlálóban minden p prímszám magasabb, vagy legalább akkora kitevőn szerepel, mint a nevezőben, akkor a nevező minden tényezőjével egyszerűsíthetünk és így $\binom{2n}{n}$ értékéül egész számot kapunk.

A számlálóban $(2n)!$-ban egy p prímszám kitevője az 5. feladat megoldásából nyert Legendre-féle azonosság szerint

$$s_p = \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{2p^2}\right] + \dots$$

A nevezőben $(n!)^2$-ben minden p prímszám kitevője a kétszeres az $n!$-ban szereplő kitevőnek, vagyis

$$n_p = 2\left[\frac{n}{p}\right] + 2\left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots$$

A számlálóban és nevezőben levő kitevők különbsége

$$s_p - n_p = \left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right) + \left(\left[\frac{2n}{p^2}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right) + \dots \tag{1}$$

Ez a kifejezés az előző feladatban szereplő $[2a] - 2[a]$ alakú kifejezésnek összege. Mivel ezeknek értéke 0 vagy 1, így összegük nem lehet negatív szám. Tehát valóban a nevezőben lévő kitevő legfeljebb akkora, mint a számlálóban lévő. Ez viszont az előzőek alapján éppen azt jelenti, hogy $\binom{2n}{n}$ egész szám.

8. *Mutassuk meg, hogy* $\binom{2n}{n}$ *törzstényezős felbontásában egyik prímszám hatványa sem lehet nagyobb* $2n$*-nél.*

Megoldás: Nézzük meg legfeljebb hányadik hatványon fordulhat elő egy p prímszám. A kitevőben szereplő végtelen sok tagból álló összeg tagjai valahonnan kezdve mind 0-val egyenlők. Honnan? Biztosan eltűnnek a tagok attól a kitevőtől kezdve, amelyre $\dfrac{2n}{p^r} \geqq 1$ és $\dfrac{2n}{p^{r+1}} < 1$. A két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk, hogy $p^r \leqq 2n < p^{r+1}$. Tehát a fenti (1) kifejezésnek legfeljebb r tagja jön számításba. Ezek a tagok mind 0-val vagy 1-gyel egyenlők, tehát összegük legfeljebb r. Vagyis p legfeljebb r-edik hatványon szerepel, viszont p^r a fenti egyenlőtlenség alapján $2n$-nél kisebb, vagy vele egyenlő.

9. *Mutassuk meg, hogy* $\binom{2n}{n}$ *prímfényezős felbontásában* $\sqrt{2n}$*-nél nagyobb prímszámok legfeljebb első hatványon szerepelnek.*

Megoldás: Ha $p > \sqrt{2n}$, akkor már $p^2 > 2n$, a 7. feladatban $s_p - n_p$-nek csak egy tagja lehet, ez is vagy 0 vagy 1, tehát $\binom{2n}{n}$ már p^2-tel sem osztható.

10. *Mutassuk meg, hogy* $\binom{2n}{n}$ *nem osztható* $\dfrac{2n}{3}$ *és* n *közötti prémszámokkal, ha* $n > 2$*.*

Megoldás: Az állítás bizonyítására azt kell igazolnunk, hogy minden olyan p prímszám, ami $\dfrac{2n}{3}$ és n között van, $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ tört számlálójában és nevezőjében ugyanazon a kitevőn szerepel.

Legyen p egy ilyen prímszám, akkor $2p$ nagyobb $\dfrac{4n}{3}$-nál, méginkább n-nél, tehát $n!$ tényezői közt már nem fordul elő. Így $n!$ törzstényezői közt p az első hatványon, tehát $(n!)^2$-ben második hatványon szerepel. $(2n)!$-ban p ugyancsak a második hatványon szerepel: ugyanis ha $\dfrac{2n}{3} < p$ akkor $3p > 2n$, tehát $3p$ nem szerepel a számlálóban, viszont $2p$ még előfordul, hiszen $2p < 2n$. $(2n)!$-nek p-vel osztható tényezői p és $2p$. Szorzatuk $2p^2$, csak akkor lehet p-nek 2-nél magasabb hatványával osztható, ha $p = 2$ volna. Azonban p nagyobb $\dfrac{2n}{3}$-nál, s így $n \geqq 3$ folytán $p > 2$. $n = 2$ esetén $\binom{4}{2} = 6$ osztható 2-vel, pedig eleget tesz a kívánt egyenlőtlenségnek.

Most már csak a 16. feladatban szereplő egyenlőtlenség megcáfolása van hátra; ha ez sikerül, akkor, legalább is $n \geqq 100$ esetén, képtelenség, hogy ne legyen prímszám n és $2n$ között. Ezért mindenekelőtt azt nézzük meg, minél nem lehet a $\binom{2n}{n}$ kisebb.

17. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n} \geqq \dfrac{4^n}{2n}$.

18. Tegyük fel ismét, hogy $n \geqq 100$ és hogy n és $2n$ között nincs prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor $2^{\sqrt{2n}} \leqq (2n)^{\frac{3}{2}}$ kellene legyen.

Ezt az egyenlőtlenséget most már nem lesz nehéz megcáfolnunk. Ugyanis legalább is valamilyen n-től kezdve, a baloldal nagyobb kell, hogy legyen, mint a jobboldal, hiszen n a baloldalon (ha gyökjel alatt is, de mégis csak) a kitevőben szerepel, a jobboldalon meg csak alapként.

19. Mutassuk meg, hogy:
a) ha $u \geqq 4$ és u egész szám, akkor $2^u \geqq 3(u+1)$;
b) ha $u \geqq 4$, akkor $2^u > 3u$ (akár egész szám az u, akár nem);
c) ha $u \geqq 12$, akkor (megint, akár egész szám az u, akár nem), $2^u \geqq u^3$.

20. Mutassuk meg, hogy $n \geqq 100$ esetén a 18. feladatban szereplő egyenlőtlenség nem állhat.

21. Mutassuk meg, hogy n és $2n$ között ($2n$-et beleértve) mindig van prímszám; azaz: bizonyítsuk be Csebysev tételét.

No lám, nem is volt nehéz!