Emlékezzünk, azért kezdtünk $\binom{2n}{n}$-nel foglalkozni, mert azt reméltük, ez a szám megérzi, hogy vannak prímszámok n és $2n$ között; vagyis, ha feltételezzük, hogy n és $2n$ között nincs prímszám, akkor $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásából kisebb érték adódik $\binom{2n}{n}$ számára, mint amekkora valójában. Nézzük meg hát most, milyen egyenlőtlenség adódik $\binom{2n}{n}$ számára a 9. és 10. feladatok megoldásával bizonyított tételek segítségével.

11. Tegyük fel, hogy n és $2n$ között nincs prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor $\binom{2n}{n}$ nem lehet nagyobb, mint $2n$-nek annyiadik hatványa, ahány prímszám van $\sqrt{2n}$-ig, megszorozva a $2n/3$-ig terjedő prímszámok szorzatával.

Ha az így kapott egyenlőtlenséget sikerül megcáfolni, akkor bebizonyítottuk, lehetetlen, hogy ne legyen n és $2n$ között prímszám. Igen ám, de a kapott egyenlőtlenségben még két ismeretlen valami szerepel: a prímszámok száma $\sqrt{2n}$-ig és a prímszámok szorzata $2n/3$-ig. Ezekre próbáljunk olyan egyenlőtlenségeket megállapítani, aminek segítségével a 11. feladatban szereplő egyenlőtlenségből egyszerűbb (de még mindig megcáfolható) egyenlőtlenséget kaphatunk.

12. Mutassuk meg, hogy $n \geq 14$ esetén n-ig (n-et is beleértve, ha prímszám) legfeljebb $\frac{n}{2} - 1$ számú prímszám van. (Az 1 nem számít prímszámnak.)

A prímszámok szorzatának vizsgálatára megint a $\binom{2n}{n}$-et vesszük igénybe. Hiszen ez osztható az n és $2n$ közötti prímszámokkal, tehát azok szorzatával is.

13. Mutassuk meg, hogy ha n legalább 5, akkor $\binom{2n}{n}$ kisebb, mint 4^{n-1}.

14. Mutassuk meg, hogy ha egyáltalában van n és $2n$ között prímszám, akkor az ilyen prímszámok szorzata kisebb, mint 4^{n-1}. (Itt az $n = 1$ eset kivételével.)

15. Jelöljük P_n-el az n számig terjedő prímszámok szorzatát. Mutassuk meg, hogy $P_n \leq 4^n$.

16. Tegyük fel ismét, hogy n és $2n$ között nincs prímszám.
Mutassuk meg, hogy akkor $\binom{2n}{n}$ nem lehet nagyobb mint $(2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}-1}4^{\frac{2n}{3}}$ feltéve, hogy $n \geq 100$.