Az első évfolyamban feladatsorozatot indítottunk CSEBYSEV tételének bebizonyítására, mely azonban a Lappal együtt abbamaradt. Tekintettel a tétel érdekességére és a bizonyítás egyszerű voltára, most újra elindítjuk. Megoldással közöljük azt a néhány feladatot, melynek megoldása már az első évfolyamban megjelent, a többieket pedig újra ki fogjak tűzni.

*

Hallottatok-e a világhírű PAFNUTIJ LVOVICSC CSEBYSEV orosz matematikus tételéről? Arról, amelyik azt mondja ki, hogy bármely n egész szám és kétszerese; $2n$ között van legalább egy prímszám. (Pl. 2 és 4 között a 3, 3 és 6 között az 5, 4 és 8 között az 5 is, a 7 is, 5 és 10 között a 7, 6 és 12 között a 7 is, a 11 is. Még akkor is igaz a tétel, ha $n = 1$, feltéve, hogy „közöttet” úgy értjük, hogy $2n$ is beleszámítson; ez ugyanis $n = 1$ esetén 2, tehát prímszám, de csak akkor.) Aki hallott róla az is azt gondolja bizonyosan, hogy borzasztó nehéz lehet ezt a tételt bebizonyítani. Talán csak akkor lehet reménye az embernek, hogy valaha is megértheti a bizonyítását, ha érettségi után matematikus-hallgatónak iratkozik be az egyetemre, vagy még akkor sem lehet. Pedig illő, hogy legalábbis hazánkban minden, a matematika iránt érdeklődő diák közkincse legyen a CSEBYSEV-tétel, mert ERDŐS PÁL, magyar matematikus, másodéves egyetemi hallgató korában olyan egyszerű bizonyítást adott rá, hogy valamennyien megérthetitek. Nemcsak, hogy megérthetitek, hanem egy kis irányítással magatok is rájöhettek az ő bizonyítására. Kitűzök most és még néhány számban egy-két feladatot; aki ezeket megoldja, végezetül majd be tudja bizonyítani CSEBYSEV tételét. Olyan élménye lesz a bizonyítás, amit egyhamar nem felejt el.

*

A prímszámokra vonatkozó tételek bizonyításának kulcsa mindig egy egyenlet, esetleg egyenlőtlenség, amelynek egyik oldalán az ismeretlen, egyelőre még titokzatos prímszámok szerepelnek, a másik oldatán pedig a jólismert egész számok. CSEBYSEV ilyen kulcs gyanánt LEGENDRE egy azonosságát használja, amely azt mondja meg, hogyan lehet az első n (pozitív) egész szám szorzatát prímtényezőire bontani. Ezt a szorzatot $n!$-sal (mondd: n faktoriális) szokás jelölni; tehát $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, stb. Arról nevezetes az $n!$, hogy ennyiféleképpen lehet n diákot egy sorba állítani. De CSEBYSEV nem emiatt a tulajdonsága miatt gondolt arra, hegy $n!$-sal dolgozzék, hanem azért, mert definíciójában az egész számok egyformán szerepelnek, tehát várható, hogy n-nel szabályosan növekszik; de ugyanakkor *szorzat*, tehát várható, hogy könnyű lesz prímtényezőire felbontani, mégpedig mindenféle, kevés és sok törzstényezőből álló számoknak szorzata, tehát várható, hogy törzstényezős felbontásában is lesz valami szabályosság. Ismerkedjünk meg közelebbről $n!$-sal!

1. *Bontsuk fel prímtényezőkre* $10!$*-t és* $20!$*-t, a nélkül, hogy előbb elvégeznők a szorzást.*

Megoldás:

$$
\begin{gathered}
10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = \\
= 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
20! = 10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = \\
= (2^8 \cdot \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 2^4 \cdot 17 \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot 19 \cdot (2^2 \cdot 5) = \\
= 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.
\end{gathered}
$$

2. *Határozzuk meg* $100!$ *prímtényezős felbontásában* 2, 3, 5 *és* 7 *kitevőjét.*

Megoldás: $100!$-t már nemhogy kiszámítani, de még felírni sem volna türelmünk. Mégis el tudjuk képzelni, hogy ha felírnók az első 100 pozitív egész szám szorzataként: akkor úgy kaphatnók meg prímtényezős felbontását, hogy minden egyes (összetett) tényezője helyébe beírnók annak prímtényezős felbontását és a 2, 3, 5, 7 s a többi prímszámok hatványait összegyűjtve, kitevőiket összeadnók. Így például 2 kitevője azon számok száma 1-től 100-ig, amelyekben a 2 az első hatványon szerepel, hozzáadva azon számok számának kétszeresét, amelyekben a 2 a második hatványon szerepel, meg azon számok háromszorosát, melyekben a harmadik hatványon szerepel, stb. A 2 csak azon számoknak a prímtényezős felbontásában szerepel, amelyek párosak; ilyen van 100-ig 50. De ezek közül 25 osztható 4-gyel, tehát csak a többi 25-ben szerepel az első hatványon a 2. A 25 4-gyel osztható szám közül 12 osztható 8-cal is, tehát csak a többi 13-ban szerepel a második hatványon, a 2. A 12 8-cal osztható szám közül 6 osztható 16-tal is, ezek közül 3 32-vel is, ezek közül 1 64-gyel is, úgyhogy 6 olyan szám van, amelyik a harmadik, 3 olyan, amelyik a negyedik, 2 olyan, amelyik az ötödik és 1 olyan (t. i. a 64), amelyik a hatodik hatványon tartalmazza prímtényezős felbontásában a 2-t. E szerint 2 kitevője a $100!$ prímtényezős felbontásában:

$$25 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 97.$$

Hasonlóan, minthogy 100-ig 33 3-mal osztható szám van, ezek közül 11 osztható 9-cel (tehát a többi 22 tartalmazza a 3-at az első hatványon), 3 osztható 27-tel (tehát a többi 8 tartalmazza a második hatványon), 1 osztható 81-gyel (tehát a többi 2 tartalmazza a 3-at a harmadik, ez az 1 pedig a negyedik hatványon), ezért 3 kitevője $100!$ felbontásában

$$22 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 48.$$

Minthogy 100-ig 20 5-tel osztható és ezek között 4 25-tel osztható szám van, tehát 16 tartalmazza az 5-öt az első, 4 pedig a második hatványon, továbbá, minthogy 100-ig 14 7-tel és ezek között 2 49-cel osztható szám van, tehát 12 tartalmazza a 7-et az első, 2 pedig a második hatványon, ezért 5 kitevője $16 + 2 \cdot 4 = 24$, 7-é pedig $12 + 2 \cdot 2 = 16$ a 100! prímtényezős felbontásában. E szerint ez a felbontás így kezdődik:

$$100! = 2^{97} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{16} \dots$$

3. *Hány 0-ra végződik* 100!*? Hát* 1000!*?*

Megoldás: Minden szám annyi 0-ra végződik, ahányadik hatványával még osztható a 10-nek. 10^k prímtényezős felbontása $2^k \cdot 5^k$, tehát egy szám akkor és csakis akkor osztható vele, ha prímtényezős felbontásában 2 is, 5 is legalább a k-adik halványon szerepel. A legnagyobb ilyen k a kérdéses szám prímtényezős felbontásában a 2 és az 5 kitevője közül a kisebbik (ha véletlenül egyenlők, akkor közös értékük). Mivel 100! felbontásában 2 kitevője 97, 5-é pedig 24, ezért 100! 24 0-ra végződik. 1000! prímtényezős felbontásában az 5 kitevője 249, mert 1000-ig 200 5-tel, 40 25-tel, 8 125-tel és 1 625-tel osztható szám van, tehát 160 tartalmazza az 5-öt az első, 32 a második, 7 a harmadik és 1 a negyedik hatványon és $160 + 2 \cdot 32 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 249$. A 2 kitevője nagyobb ennél, hiszen 1000-ig 500 páros szám van s ezek mindegyike legalább első hatványon tartalmazza a 2-t. Ezért 1000! 249 0-ra végződik.

4. *Határozzuk meg* $(2^n)!$ *és* $(2^n - 1)!$ *prímtényezős felbontásában a 2 kitevőjét.*

Megoldás: Az $1, 2, 3, \dots, 2^n$ számok között 2^{n-1} páros van, ezek közül 2^{n-2} 4-gyel osztható, 2^{n-3} 8-cal, 2^{n-4} 16-tal, ... végül egyetlen egy 2^n-nel osztható. Így közülük $2^{n-1} - 2^{n-2}$ tartalmazza a 2-t az első, $2^{n-2} - 2^{n-3}$ a második, $2^{n-3} - 2^{n-4}$ a harmadik, ..., végül 1 az n-edik hatványon. E szerint a 2 kitevője a $(2^n)!$ prímtényezős felbontásában

$$\begin{aligned}2^{n-1}-2^{n-2} &+ 2(2^{n-2} - 2^{n-3}) + 3(2^{n-3} - 2^{n-4}) + \dots + n \cdot 1 = \\ &= 2^{n-1} - 2^{n-2} + 2 \cdot 2^{n-2} - 2 \cdot 2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-3} - \dots - (n-1) + n = \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1 = 2^n - 1.\end{aligned}$$

Minthogy $(2^n - 1)! = (2^n)! : 2^n$, azért prímtényezős felbontásában a 2 kitevője n-nel kevesebb, mint $(2^n)!$-éban, vagyis $2^n - n - 1$.

5. *Fejezzük ki az algebra nyelvén, hogyan határozhatjuk meg* $n!$ *prímtényezős felbontásában a* p *prímszám kitevőjét.*

Megoldás: Az $1, 2, 3, \dots, n$ számok között annyi p-vel osztható van, ahány egész-szer megvan a p az n-ben, azaz $\left[\frac{n}{p}\right]$[1], annyi p^2-tel osztható, ahány egész-szer a p^2 megvan az n-ben, azaz $\left[\frac{n}{p^2}\right]$, hasonlóan p^3-nel $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ számú osztható, s. í. t.: végül, ha $p^k \leqq n < p^{k+1}$, akkor p^k-nal $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ számú osztható, p magasabb hatványával azonban egy sem. E szerint az $1, 2, 3, \dots, n$ számok, között $\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p^2}\right]$ számúnak a prímtényezős felbontása tartalmazza a p-t az első hatványon, $\left[\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{n}{p^3}\right]$ számúé a másodikon, $\left[\frac{n}{p^3}\right] - \left[\frac{n}{p^4}\right]$ számúé a harmadikon, s. í. t., $\left[\frac{n}{p^{k-1}}\right] - \left[\frac{n}{p^k}\right]$ számúé, a $(k-1)$-ediken és $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ számúé a k-adikon. Így az $n!$ prímtényezős felbontásában a p kitevője

$$\begin{aligned}&\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p^2}\right] + 2\left(\left[\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{n}{p^3}\right]\right) + 3\left(\left[\frac{n}{p^3}\right] - \left[\frac{n}{p^4}\right]\right) + \dots + \\ &\quad + (k-1)\left(\left[\frac{n}{p^{k-1}}\right] - \left[\frac{n}{p^k}\right]\right) + k\left[\frac{n}{p^k}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p^2}\right] + 2\left[\frac{n}{p^2}\right] - 2\left[\frac{n}{p^3}\right] + \\ &\quad + 3\left[\frac{n}{p^3}\right] - \dots - (k-1)\left[\frac{n}{p^k}\right] + k\left[\frac{n}{p^k}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots + \\ &\quad + \left[\frac{n}{p^k}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots,\end{aligned}$$

ahol az összeg az $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ tagon túl is folytatható, hiszen a többi tagja úgyis 0. Az eredményt utólag még így is igazolhatjuk: $\left[\frac{n}{p}\right]$ jelenti az $1, 2, 3, \dots n$ számok közül a p-vel oszthatók. $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ a p^2-tel, $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ a p^3-nel oszthatók számát,

[1] Olv. „$\frac{n}{p}$ egész része.” Ez a legnagyobb olyan egész számot jelenti, mely még nem nagyobb $\frac{n}{p}$-nél. Lásd erre vonatkozólag a 85–89. feladatokat, I. évf. 49–51. és 71–72. lap,

s. í. t. Ha tehát egy szám p-vel osztható, de p^2-tel nem, akkor az $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$ összegben csak egyszer vettük számba, t.i. az első tagban; ha p^2-tel osztható, de, p^3-nel már nem, akkor kétszer vettük számba, t. i. az első és második tagban; ha p^3-nel is osztható, de p^4-tel nem, akkor háromszor vettük számba, t. i. az első, második és harmadik tagban, és így tovább; minden számot annyiszor vettünk számba, amennyi a prímtényezős felbontásában a p kitevője, így az összeg e kitevők összege, vagyis $n!$ felbontásában p hatványkitevője.

Megjegyzések: A $p^k \leqq n < p^{k+1}$ egyenlőtlenség $k \leqq \frac{\log n}{\log p} = {}^p\log n < k+1$ alakban írható; tehát az ennek eleget tevő egész szám $k = \left[\frac{\log n}{\log p}\right] = [{}^p\log n]$.

Numerikusan adott n és p esetén célszerűbb a számítást így berendezni legyen $\left[\frac{n}{p}\right] = n_1$, $\left[\frac{n_1}{p}\right] = n_2$, $\left[\frac{n_2}{p}\right] = n_3, \ldots$; akkor $n!$ prímtényezős felbontásában a p prímszám kitevője: $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k$.

Ugyanis $\left[\frac{n}{p^2}\right] = \left[\frac{\frac{n}{p}}{p}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right] = \left[\frac{n_1}{p}\right] = n_2$, $\left[\frac{n}{p^3}\right] = \left[\frac{\frac{n}{p^2}}{p}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{p^2}\right]}{p}\right] = \left[\frac{n_2}{p}\right] = n_3\ldots$, mert általában $\left[\frac{x}{p}\right] = \left[\frac{[x]}{p}\right]$ [1]

*

Az 5. feladat megoldásával a Legendre-féle

$$n! = 2^{\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\ldots} \cdot 3^{\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{27}\right]+\ldots} \cdot 5^{\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{25}\right]+\left[\frac{n}{125}\right]+\ldots}$$

azonosságban (ahol prímszámok persze n-ig mennek) olyan kulcshoz jutottunk, amely alkalmas egyes, a prímszámokra vonatkozó kérdések megoldására. De vajon hogyan forgassuk ezt a kulcsot, hogy a Csebysev- tétel nyitját megtaláljuk? Mit kezdjünk $n!$-sal, hogy éppen az n és $2n$ közötti prímszámokról tudósítson bennünket?

Csebysev eredeti bizonyítása egy nagyon bonyolult, az $n!$ segítségével képezett kifejezés vizsgálatán alapul. Erdős (és már előtte az indus Ramanujan is) a Csebysev-féle kifejezés helyett a sokkal egyszerűbb

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1\cdot 2\ldots n(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

kifejezést használja. Ezt a kifejezést $\binom{2n}{n}$-nel (mondd: $2n$ alatt n) szokás jelölni: általában $\binom{m}{n}$-nel az $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ kifejezést jelöljük. Ez arról nevezetes, hogy egy m tagú osztályból ennyiféleképpen lehet kijelölni egy n tagú küldöttséget, így $\binom{m}{n}$ csak látszólag tört, valójában mindig egész szám az értéke. De Erdős sem azért gondolt arra, bogy $\binom{2n}{n}$ segítségével fogjon hozzá a Csebysev-tétel bizonyításához, mert ha egy $2n$ tagú osztálynak pontosan a felét visszük kirándulni, akkor éppen $\binom{2n}{n}$ féleképpen lehet kijelölni, hogy kik jussanak a kirándulók közé. Hanem azért, mert $\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$ meg kell, hogy érezze, hogy n és $2n$ között vannak prímszámok Hiszen ezekkel a prímszámokkal minddel osztható, mert a számlálója osztható velük, de a nevezője nem; az n-ig terjedő prímszámok azonban a nevezőjében is előfordulnak, így ezek közül sok kiesik egyszerűsítés közben. Várható hát, hogy ha feltételezzük, hogy n és $2n$ között nincs prímszám, akkor $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásából sokkal kisebb értéket kapunk. $\binom{2n}{n}$ számára, mint amekkora valójaban. Ismerkedjünk meg hát közelebbről a $\binom{2n}{n}$-nel!

6. Mutassuk meg, hogy ha a pozitív szám, akkor $[2a]-2[a]$ értéke vagy 0, vagy 1.

7. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ mindig egész azám.

8. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ tözzstényezős felbontásában egyik prímszám hatványa sem lehet nagyobb $2n$-nél. (A hatványról van szó, nem a hatványkitevőről!)

9. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásában a $\sqrt{2n}$-nél nagyobb prímszámok legfeljebb első hatványon szerepelnek (azaz vagy nem szerepelnek, vagy csak első hatványon).

10. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ nem osztható a $\frac{2}{3}n$ és n közötti prímszámokkal (n-et beleértve, ha prímszám; $\frac{2}{3}n$-et akkor sem értve bele, ha n osztható 3-mal és $\frac{2}{3}n$ prímszám).

[1] Lásd 85. feladat, I. évi, 49. 1.