Nehézsége miatt nem tűztük ki megoldásra, de bizonyára többen kíváncsiak a moszkvai Olimpiászon kitűzött következő feladat megoldására:

Bizonyítsuk be, hogy a 2^n alakú számok, alkalmas kitevő mellett tetszőlegesen megadott számjegysorozattal kezdődhetnek.

Megoldás: A tétel azt jelenti, hogy akármilyen egész szám A, található olyan m egész szám, hogy $A \cdot 10^m +$(egy m jegyű szám) éppen 2-nek valamelyik egész számú hatványával egyenlő. Minthogy egy m jegyű szám kisebb 10^m-nél, a tétel úgy is megfogalmazható, hogy tetszőleges A egész számhoz van olyan m és n egész szám, hogy

$$A \cdot 10^m \leq 2^n < (A+1)10^m.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség helyett tekintsük a 10 alapú logaritmusát, vagyis igazoljuk, hogy

$$\lg A + m \leq n \lg 2 < \lg(A+1) + m$$

Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, $\lg 2$-nek van olyan egész többszöröse, hogy ha $\lg A$-t egy alkalmas egész számmal megnöveljük és $\lg(A+1)$-et ugyanannyival, ezek közrefogják. Ebben az m értéke nem lényeges, sőt még $\lg A$-ból és $\lg(A+1)$-ből is csak annyi a fontos, hogy a legközelebbi egész számtól mennyire vannak. Ugyanis $\lg A$ és $\lg(A+1)$ ugyanazon két szomszédos egész szám közé esik. Ha tehát minden két egész szám közt kijelöljük azt a két számot, mely úgy helyezkedik el köztük, mint $\lg A$ és $\lg(A+1)$ az őket közrefogó egész számok közt, akkor a bizonyítandó állítás azt mondja, hogy $\lg 2$ egymás utáni többszörösei közt van olyan, amelyik az egyik kijelölt intervallumba esik.

Még áttekinthetőbbé válik a feladat, ha ezeket az intervallumokat egymásra helyezzük. Képzeljük el a számegyenest és rajta kijelölve az egész számokat és az említett intervallumokat. Vegyünk egy egységnyi kerületű kört és képzeljük e köré csavarva a számegyenest. Ekkor az összes egész számok ugyanarra a pontjára esnek a körnek. Nevezzük ezt a továbbiakban 0-pontnak. Az összes kijelölt intervallumok pedig fedni fogják egymást. Jelöljük közös kezdőpontjukat x_1-gyel, végpontjukat x_2-vel.

A $\lg 2$ többszöröseit is hasonlóan fel kell gombolyítanunk a körre és azt kell bebizonyítani, hogy az így keletkező végpontok közt lesz olyan, amelyik x_1 és x_2 közé esik. Az sem lényeges, hogy x_1 és x_2 hogyan keletkezett, mert az állítás a kör bármely $(x_1,\, x_2)$ ívére igaz.

Tovább is egyszerűsíthetjük a feladatot. Ha találunk egy olyan $p \lg 2$ többszöröst, mely a 0-ponttól kisebb távolságra esik, mint $x_2 - x_1$, akkor a $2p \lg 2$ kétszer ilyen távolságra, a $3p \lg 2$ háromszor ilyen távolságra kerül a körön a 0-ponttól stb. Ezeket a többszörösöket sorra felrajzolva az egész körön, egynek az $(x_1,\, x_2)$ ívre kell esnie, mert két-két pont távolsága feltevés szerint kisebb ennél az ívnél. Ez a meggondolás csak akkor nem volna alkalmazható, ha $p \lg 2$ a 0-pontba esik, vagyis ha $p \lg 2 = q$ egész. Ez azonban azt jelentené, bogy $\lg 2 = q/p$, azaz $2 = 10^{q/p}$ amiből $2^p = 10^q$, ami lehetetlen, mert a baloldal osztható 5-tel, a jobb pedig nem. $\lg 2$ tehát nem racionális szám.

A kívánt tulajdonságú többszörös viszont létezik, ha egyáltalán létezik két olyan többszöröse $\lg 2$-nek, melyek a kívánt távolságnál kevesebbre vannak egymástól bárhol a körön. Ha ugyanis $k \lg 2$ és $j \lg 2$ ilyen $(k < j)$, akkor mindkettőből ugyanazt a számot levonva ugyanilyen távolságú pontokat kapunk. Vonjunk le $k \lg 2$-t, kapjuk, hogy $(k-j) \lg 2$ a 0-hoz a kívánt távolságnál közelebb van, tehát p-t választhatjuk $k-j$-nek.

Két ilyen többszörös létezését már könnyű megmutatni. Osszuk a kört $x_2 - x_1$-nél kisebb egyenlő részekre, vagyis válasszunk egy q egész számot úgy, hogy $1/q < x_2 - x_1$ legyen és osszuk a kört q számú egyenlő ívre. Ha találunk $\lg 2$-nek két olyan többszörösét, melyek ugyanazon ívre esnek, akkor ezek távolsága kisebb mint $1/q$, tehát még inkább kisebb $x_2 - x_1$-nél. Jelöljük ki a körön sorra a $0 \cdot \lg 2$, $1 \cdot \lg 2$, $2 \cdot \lg 2$, $\ldots$, $q \cdot \lg 2$-nek megfelelő pontokat, akkor kapunk $q+1$ számú pontot. Valamelyik ívre kell legalább 2 pontnak esnie (mindegyik ívhez számítsuk hozzá a kezdőpontját) mert, ha mindegyik íven csak 1 pont volna, ez még összesen legfeljebb q számú pont volna. Egy ilyen pontpárnak megfelelő többszörösök legyenek $k \lg 2$ és $j \lg 2$, ezek tehát kisebb távolságra esnek egymástól, mint $x_2 - x_1$.

Mint mondtuk, ekkor $(k-j) \lg 2 = p \lg 2$ a 0-hoz lesz közelebb, mint $x_2 - x_1$ és akkor van ennek egy olyan többszöröse; $hp \lg 2 = n \lg 2$, mely x_1 és x_2 közé esik a körön.

Ez igaz bármely x_1 és x_2-re. Jelentse most x_1 és x_2 ismét azt a két pontot, melyek olyan messze vannak 0-tól, mint $\lg A$ és $\lg(A+1)$ az őket megelőző legnagyobb egész számtól. Gombolyítsuk most újra le a számegyenest az egységnyi kerületű körről, vagyis nézzük meg, mit mondanak eredményeink a számok pontos értékét és nem csak az egész számoktól való eltérését nézve. Jelöljük r-rel a $\lg A$ alatti legnagyobb egész számot, s-sel az $n \lg 2$ alatti legnagyobb egészet. $\lg A = r + x_1$, $0 \leq x_1 < 1$, azaz $10^r \leq A < 10^{r+1}$. Ekkor $10^r < A+1 \leq 10^{r+1}$, mert A egész szám, tehát $\lg(A+1) = r + x_2$ egyenlőségben $x_1 < x_2 \leq 1$. Végül $n \lg 2 = s + y$, $0 < y < 1$ és a fentiekben találtunk olyan n-et, melyre $x_1 < y < x_2$, azaz x_1, x_2 és y értelmét beírva

$$\lg A - r < n \lg 2 - s < \lg(A+1) - r,$$

vagyis $\lg A + (s-r) < n \lg 2 < \lg(A+1) + (s-r)$.

Ha $s-r$ pozitív, akkor ezt a számot választva m-nek bizonyítottuk a kívánt egyenlőtlenséget. Ha azonban $s < r$, akkor óvatosabban kell eljárnunk. Mivel r egy határozott szám, csak $\lg 2$-nek egy későbbi többszörösét kell keresnünk, mely egy egész számtól eltekintve szintén x_1 és x_2 közé esik. Ilyet sem nehéz találni. Gyerünk ismét vissza az egységnyi kerületű körre. A megtalált $n \lg 2$-ből most menjünk tovább. Ismét mérjük fel $p \cdot \lg 2$-t annyiszor egymásután, míg egyszer körüljárják a végpontok a kört. Mivel $x_2 - x_1$-nél kisebb lépésekben haladunk eközben, tehát újra kell egy végpontnak x_1 és x_2 közé esnie. Ha $\lg 2$-nek még ez a többszöröse is $\lg A$ alatt marad, akkor annyiszor járjuk hasonlóan körül a kört, míg már $\lg 2$-nek egy $\lg A$-nál nagyobb többszörösét kapjuk, mely egy egész számtól eltekintve ismét x_1 és x_2 közé esik. Erre végezve el a fenti meggondolást nyerjük, hogy megoldása a kívánt egyenlőtlenségnek.

Megjegyzés: A bizonyításban csak akkor használtuk fel, hogy $\lg 2$-ről van benne szó, amikor megmutattuk, hogy ez irracionális szám. x_1 és x_2 tetszőleges olyan számok lehettek, melyekre $0 < x_1 < x_2 \leq 1$. Amit bizonyítottunk, az tehát minden irracionális számra igaz. Nevezzük egy a szám „tört részének”[1] azt a 0 és 1 közé eső számot, mely úgy keletkezik, hogy a-ból egy alkalmas egész számot levonunk. Jelöljük ezt $\{a\}$-val. Ekkor azt bizonyítottuk be, hogy ha a tetszőleges irracionális szám, akkor az $\{a\}$, $\{2a\}$, $\{3a\}$, $\ldots$ számsorozatnak, ha elég hosszan folytatjuk, a (0, 1) számköz bármely kis $(x_1\,x_2)$ részébe is esik eleme. Ezt rövidebben úgy szoktuk mondani, hogy egy irracionális szám többszöröseinek törtrészei *mindenütt sűrűen helyezkednek el* a (0, 1) intervallumban. Az állítás biztosan nem igaz racionális számra, mert annak többszöröseit véve, ezek közt van egész szám s onnan a további többszörösök tört része már ismétlődik, tehát összesen csak véges számú különböző értéket vehetnek fel. Így nem is helyezkedhetnek el mindenütt sűrűen a (0, 1) intervallumban.

[1] A „tört rész” elnevezés helytelen, mert épp az itt bizonyított tétel is irracionális számok „tört részéről” szól, az pedig éppen nem törtszám, hanem irracionális. A kifejezés azonban elterjedt. Jól jegyezzük tehát meg, hogy egy szám tört része egyáltalán nem köteles törtszám lenni, csak 0 és 1 közé eső racionális vagy irracionális számot jelent.