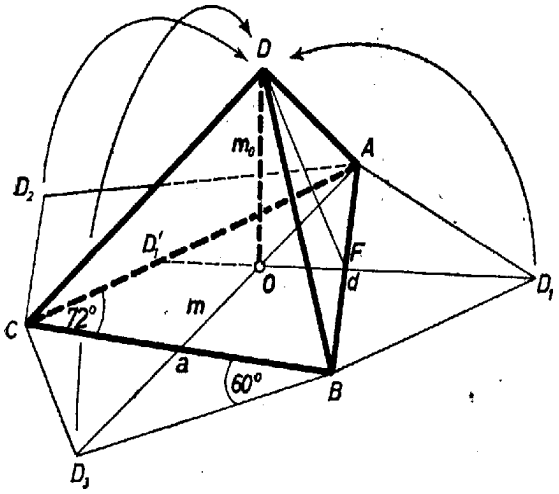
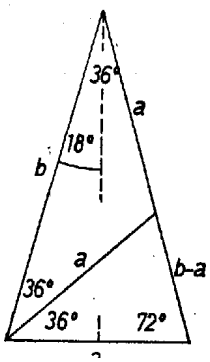
Legyenek az $AD_1BCD_2$ szabályos ötszög megrajzolt átlói $AB$ és $AC$, a $BC$ oldal fölé szerkesztett szabályos háromszög új csúcsa $D_3$. A szabad $D_1$, $D_2$, $D_3$ csúcsok valóban összeérnek egy $D$ pontban, a gúla létrejön. Ugyanis mindhárom fölhajtott lap egyenlő szárú háromszög, és száruk egyenlő az adott ötszög $a$ oldalával; másrészt a szabad csúcs a hajtásvonalnak az alapsíkban levő felező merőlegese fölött fordul el, pl. $D_1$ legföljebb az $AB$-re vett $D_1'$ tükörképéig, e 3 felező merőlegesnek van közös pontja, az adott ötszög $O$ középpontja, és ez rajta van mindhárom $D_iD_i'$ szakaszon ($i = 1,\ 2,\ 3$), hiszen $OAB\sphericalangle = OAC\sphericalangle = = BAC\sphericalangle/2 = 18^\circ < 36^\circ = BAD_1$, és $OBC\sphericalangle = 54^\circ < 60^\circ = D_3BC$.




*1. ábra*




*2. ábra*

Az alapháromszögnek a $BC = a$ hosszú alapélhez tartozó $m$ magassága egyben az ötszög szimmetriatengelye, ebből a $t$ alapterület

$$m = \frac{a}{2}\operatorname{tg}72^\circ, \qquad t = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}72^\circ = \frac{a^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Legyen az ötszög $AB$ átlója $d$, ennek felezőpontja $F$. Ekkor az $ABD$ oldallap magassága, ennek az alapsíkon levő vetülete, majd a gúla magassága

$$DF = \frac{d}{2}\operatorname{tg}36^\circ = \frac{d}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \qquad OF = \frac{d}{2}\operatorname{tg}18^\circ = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}},$$

$$DO = \sqrt{DF^2 - OF^2} = \frac{d}{\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

Végül a $d$ átló és a keresett $V$ térfogat:

$$d = \frac{a}{2\cos 72^\circ} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1),$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \frac{a^3}{24}(\sqrt{5}+1) \quad (\approx a^3\cdot 0{,}135).$$

*Birkner Lajos* (Budapest, Könyves Kálmán gimn. III. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Mindegyik felhasznált szögfüggvényérték levezethető pl. $\sin 18^\circ$-ból, ez pedig abból adódik, hogy ha az $a$ alapú, egyenlő szárú háromszög $b$ szárai közti szög $36^\circ$, akkor az alapon levő egyik szög felezője két egyenlő szárú

háromszögre bontja a háromszöget és közülük az alapra támaszkodó háromszög hasonló az eredetihez: $(b-a):a=a:b$, és ebből

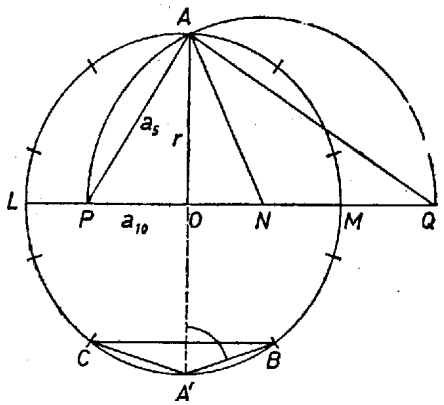
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)-1=0, \qquad \sin 18^\circ=\frac{a}{2b}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

(a másik gyök negatív). Pl.

$$\sin 72^\circ=\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\operatorname{tg} 72^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

2. Akik ismerik az ún. *Ptolemaiosz-Dürer*-féle eljárást adott körbe írt szabályos tízszög és ötszög oldalának szerkesztésére, észreveszik, hogy gúlánk magassága egyenlő a kiindulási ötszög köré írt $k$ körbe írható szabályos tízszög $a_{10}$ oldalával.




*3. ábra*

Valóban, a mondott eljárásban[1] vesszük $k$-nak $OA$ sugarára merőleges $LM$ átmérőjét,és az $OM$ sugár $N$ felezőpontja körüli $NA$ sugarú körrel metsszük az $OL$ sugarat $P$-ben. Ekkor $ON=r/2$, $AN=r\sqrt{5}/2$ és így $PO=r(\sqrt{5}-1)/2=2r\sin 18^\circ=a_{10}$, másrészt $AP=a_5=2r\sin 36^\circ=4r\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ$, ugyanis az előző megjegyzés szerint

$$a_5^2-a_{10}^2=4r^2\sin^2 18^\circ\big(4\cos^2 18^\circ-1\big)=r^2\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}=r^2,$$

így pedig valóban $a_5^2=a_{10}^2+r^2=PO^2+OA^2=AP^2$, ennélfogva a $PAO$ derékszögű háromszög egybevágó gúlánk $DAO$ háromszögével: $m_0=OD==OP=a_{10}$.

Meglátásunk alapján a térfogat kiszámításában egyszerűsödés adódik:

$$V=\frac{1}{3}tm_0=\frac{1}{6}(ad\sin 72^\circ)\cdot a_{10}=\frac{ad}{12}\cdot(2a_{10}\sin 72^\circ)=\frac{a^2d}{12}=\frac{a^3}{24}(\sqrt{5}+1),$$

ha ugyanis a $k$-ba írt szabályos tízszög három egymás utáni csúcsa $B$, $A'$, $C$, akkor $BA'C\sphericalangle/2=72^\circ$, és mint a tízszög legrövidebb átlója, $a_5=BC=2BA'\cdot\cdot\sin(BA'C\sphericalangle/2)=2a_{10}\sin 72^\circ$.

3. A fentebbiekhez hasonlóan lehet megmutatni azt is, hogy az $N$ ($NA$) kör és az $LM$ egyenes másik metszéspontját $Q$-val jelölve $AQ=AB$ az ötszög $d$ átlója, egyszersmind a tízszög 4 oldalát áthidaló átlójának hossza, $OQ$ pedig a 3 oldalt áthidaló átló hossza.

[1] Lásd 1472. feladat, K. M. L. 34 (1967) 19. o.; 1213. feladat, 27 (1963) 20. o.