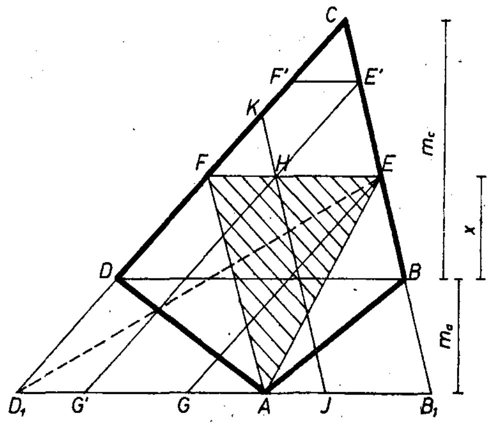
I. megoldás. Legyen az A és C csúcs, továbbá az eltolódó EF egyenes távolsága a BD átló egyenesétől rendre m_a, m_c, x. CEF és CBD hasonló háromszögek, ebből



$$EF = BD \cdot \frac{m_c - x}{m_c},$$

így az AEF háromszög területe, mint x függvénye:

$$y = \frac{BD}{2m_c}(m_c - x)(m_a + x) = -\frac{BD}{2m_c}(x + m_a)(x - m_c),$$

ahol $0 \leq x \leq m_c$.

Ez másodfokú függvény. Jól tudjuk, hogy minden (valódi) másodfokú függvénynek van szélső értéke, és annak helyét megadja a függvény két 0-helyének számtani közepe, ill. bármely olyan x', x'' helyek számtani közepe, amely helyeken a függvény egyenlő értéket vesz fel. Esetünkben a 0-helyek $x = -m_a$ és $x = m_c$, tehát a szélső érték helye

$$x_0 = \frac{m_c - m_a}{2},$$

amennyiben ez a hely beletartozik az értelmezési tartományba:

$$0 \leq x_0 \leq m_c, \quad \text{azaz} \quad 0 \leq \frac{m_c - m_a}{2} = m_c, \quad \text{vagyis ha} \quad m_a \leq m_c.$$

Ez akkor teljesül, ha C távolabb van a BD átlótól, vagy legalább ugyanannyira van tőle, mint az A csúcs.

Azt is tudjuk, hogy a másodfokú függvénynek maximuma, ill. minimuma van aszerint, hogy egy a mondott x', x'' helyek közti helyen nagyobb, ill. kisebb értéket vesz fel, mint a két helyen felvett közös érték. Mármost $-m_a < 0 < m_c$, és az $x = 0$ helyen függvényünk értéke

$$y = \frac{BD \cdot m_a}{2} > 0,$$

tehát x_0-ban maximum van, ha $m_a \leq m_c$.

Ha $x_0 < 0$, azaz $m_a > m_c$, akkor hasonló meggondolás szerint a $0 \leq x \leq m_c$ intervallumban a függvény monoton csökken, legnagyobb értékét az intervallum bal végpontjában, $x = 0$-ban veszi fel, ekkor az eltolódás folyamán az AEF háromszög a kiinduló ABD helyzetben vesz fel legnagyobb területet. – Más vizsgálandó eset nincs, mert $x_0 > m_c$ lehetetlen.

Sax Gyula (Budapest, Kölcsey F. G., III. o. t.)

II. megoldás. Messe az A-n át BD-vel párhuzamosan húzott egyenes CB és CD meghosszabbítását a B_1, ill. D_1 pontban. Ekkor az AEF háromszög területe egyenlő a D_1EF háromszögével és fele akkora, mint a $D_1GEF = P$ paralelogrammáé, – G-vel jelölve az E-n át CD_1-gyel párhuzamosan húzott egyenes metszéspontját B_1D_1-gyel. Elég tehát a BD-vel párhuzamos egyenesek különböző helyzeteihez tartozó ilyen paralelogrammák közül keresni ki a legnagyobb területűt.

Az egyenes egy C-hez közelebbi helyzetéhez tartozó, megfelelő paralelogramma legyen $D_1G'E'F' = P'$, EF és $E'G'$ metszéspontja pedig H. Ekkor P'-ből az $E'F'FH$ paralelogramma nyúlik túl P-n, viszont az utóbbiból $EHG'G$-t nem fedi le P'. Hasonlítsuk össze e két paralelogramma területét. Toljuk el $G'G$-t D_1B_1-en a JB_1 helyzetbe, FF'-t pedig D_1C-n a KC helyzetbe. Ismét paralelogrammákat kapunk, tehát H, J, K egy a B_1C-vel párhuzamos egyenesen van. P' területe $CKHE'$ területével nagyobb, viszont B_1EHJ területével kisebb, mint P területe. Az említett két paralelogrammának a B_1C egyenesre merőleges magassága egyenlő, így az első aszerint kisebb területű a másodiknál, egyenlő vele, vagy nagyobb nála, amint CE' kisebb B_1E-nél, egyenlő vele, vagy nagyobb nála, ez pedig attól függ, hogy $E'F'$ messzebb van-e C-től, mint EF az A-tól, vagy ugyanakkora távolságra vannak, vagy EF van közelebb A-hoz mint $E'F'$ a C-hez. Ugyanezt mondhatjuk tehát a P', P paralelogrammák és az $AE'F'$, AEF háromszögek területéről is.

Eszerint a C csúcsból indítva a BD-vel párhuzamos egyenest, az AEF háromszög területe nő, míg el nem éri az egyenes BD-t, ha ez C-től legfeljebb akkora távolságra van, mint A-tól; ha viszont A-hoz van közelebb, akkor addig növekszik a háromszög területe, míg az egyenes egyenlő távolságra nem lesz C-től és A-tól; tovább közeledve A-hoz a terület csökken. A legnagyobb területet tehát a BD átló szolgáltatja, ha ez C-től legfeljebb akkora távolságra van, mint A-tól, viszont a két mondott csúcstól egyenlő távolságra levő egyenes, ha BD közelebb van A-hoz, mint C-hez.