K tagjainak száma $n+1$, közülük 4–4 tag együtthatója egyenlő: $1, 2, \ldots$, így középen 1-gyel több egyenlő együtthatójú tag van, mint amennyi az n-nek 4-gyel való osztásában fellépő maradék. Legyen $n = 4p + q$, ahol $0 \leq q < 4$, akkor a középső tagok száma $q+1$, azaz 1, 2, 3 vagy 4, és együtthatójuk $p+1$.

K felbontható $p+1$ számú olyan mértani sorozat összegére, amelyek mindegyikében a hányados x, a (jobbról számított) első tag rendre $1, x^2, x^4, \ldots, x^{2p}$, a tagok száma 4-esével csökken, vagyis rendre $n+1, n-3, n-7, \ldots, q+5$, végül az utolsóban $n+1-4p = q+1$, majd minden egyes sorozat összegét zárt alakban írjuk (feltéve, hogy $x \neq 1$):

$$\begin{aligned} K = &(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1) + \\ &+ (x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4} + \ldots + x^4 + x^3 + x^2) + \ldots + \\ &+ (x^{n-2p} + \ldots + x^{2p}) = \\ &= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^2 \cdot \frac{x^{n-3}-1}{x-1} + \ldots + x^{2p} \cdot \frac{x^{n-4p+1}-1}{x-1}. \end{aligned}$$

Beszorzással és külön gyűjtve a számlálók első tagjait

$$(x-1) \cdot K = (x^{n+1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-2p+1}) - (1 + x^2 + \ldots + x^{2p}).$$

Az első összegből az utolsó tagot kiemelve a zárójelben a második zárójel tagjai maradnak, fordított sorrendben, és x^2 hányadosú mértani sorozatot alkotnak, ezért

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot K &= (x^{n-2p+1} - 1)(1 + x^2 + \ldots + x^{2p}) = \\ &= \frac{(x^{n-2p+1}-1)(x^{2p+2}-1)}{x^2-1}, \end{aligned}$$

amennyiben $x^2 \neq 1$. Ennélfogva $2p = (n-q)/2$ figyelembevételével

$$K = \frac{(x^{\frac{n-q}{2}+2} - 1)(x^{\frac{n+q}{2}+1} - 1)}{(x-1)(x^2-1)}.$$

A kizárt $x = 1$ esetben K négy azonos számtani sorozatra bontható, egyenként p számú taggal, középen pedig még $q+1$ tag áll, mindegyikük $p+1$, így

$$\begin{aligned} K &= 4(1 + 2 + \ldots + p) + (q+1)(p+1) = (p+1)(2p+q+1) = \\ &= \frac{1}{8}(n-q+4)(n+q+2). \end{aligned}$$

$x = -1$ esetén K tagjai váltakozó előjelűek, így az ugyanazon együtthatójú 4–4 tag összege 0, csak a $p+1$ abszolút értékű tagokat kell néznünk. Páratlan a esetén vagy nincs ilyen, vagy kettő van, és mivel szomszédok, mindenképpen $K = 0$. Páros n, azaz $q = 0$ és 2 esetén pedig $K = p + 1 = (n-q+4)/4$, mert a pozitív tagok vannak többségben, hiszen jobbról haladva. közép felé az 1-gyel nagyobb együtthatójú tagok közül az elsőben páros a kitevő.

Lempert László (Budapest, Radnóti M. gyak. gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. Eredményünk $x = 0$ esetén is érvényes, amint a mértani sorozat összegképlete is érvényes $q = 0$ esetén is.