Adataink alapján – a piros, fehér és zöld pontok számát rendre p-vel, f-fel, z-vel jelölve – e 3 ismeretlenre az alábbi (1)–(4) egyenleteket állíthatjuk fel. (2)-höz és (4)-hez szükséges tudnunk, hogy n elemből hányféleképpen választható ki egy pár. Sorba szedve az elemeket, az első, második, harmadik, ..., $n-1$-edik elem rendre a rákövetkező $n-1$, $n-2$, $n-3$, ..., 1 elemmel alkothat előzőleg még számba nem vett párt, így a lehetséges párok száma:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

$$pf+pz+fz=213, \tag{1}$$

$$\frac{p(p-1)}{2}+\frac{f(f-1)}{2}+\frac{z(z-1)}{2}=112, \tag{2}$$

$$pfz=540, \tag{3}$$

$$\frac{p(p-1)}{2}\cdot(f+z)=612, \tag{4}$$

és ezek alapján a $F=\frac{f(f-1)}{2}\cdot(p+z)$ kifejezés értékéről kell valamit mondanunk. Óvatosságra int, hogy több egyenletünk van, mint ahány ismeretlenünk.

Vegyük észre, hogy (1) és (2) alatt minden pontpár összekötő egyenesét számba vettük, éspedig mindegyiket pontosan egyszer, hiszen bármely pontpár vagy 2 különböző színű vagy 2 ugyanolyan színű pontból áll. Ennek alapján – pontjaink együttes számát x-szel jelölve – az összekötő egyenesek száma

$$\frac{x(x-1)}{2}=213+112=325.$$

Innen csak a pozitív gyököt használhatjuk: $x=p+f+z=26$.

Ezt felhasználva (4)-ből egyismeretlenes, harmadfokú egyenletet kapunk p-re:

$$p(p-1)(26-p)=1224. \tag{5}$$

A bal oldal mindegyik tényezője természetes szám, ezért a megoldást kereshetjük a jobb oldalnak különböző alapú törzsszámhatványok szorzatára való felbontása alapján is. $1224=2^3\cdot3^2\cdot17$, vagyis valamelyik tényező osztható 17-tel. Másrészt látjuk, hogy $p<26$ és már $2\cdot17>26$, így az a tényező egyenlő is 17-tel. $p=17$ és $p-1=17$ esetén (5) bal oldalának értéke nem 1224, számunkra csak a $26-p=17$-ből adódó $p=9$ érték felel meg.

Most már $f+z=17$, és ezt (3)-mal egybekapcsolva kiszámíthatjuk f-et, z-t, és amennyiben ezek természetes számok, F-et is. Előre látjuk azonban, hogy válaszunk nem lehet egyértelmű, hiszen az adódó másodfokú egyenletnek gyökei, ha egészek, akkor különbözők, mert összegük páratlan, és mindegyik gyököt vehetjük f-nek.

(3)-ból $fz=f(17-f)=60$, így $f=5$ vagy $f=12$, tehát $z=12$, ill. $z=5$. Ezek, és $p=9$ az (1)–(4) egyenletek mindegyiket kielégítik. Az első esetben a 2 fehér csúccsal bíró háromszögek száma $F=10\cdot21=210$, a másodikban pedig 924.

Farkas György (Budapest, Landler J. Gép- és Hír. ip. Techn., III. o. t.)
Kóczy László (Budapest, fazekas M. gyak. gimn. II. o. t.)

Megjegyzések. A feladat több más úton is megoldható. Pl. a $p+f+z=26$ eredményhez (1)-et és (3)-at hozzávéve p, f és z mindegyikére teljesül az

$$y^3-26y^2+213y-540=0$$

harmadfokú egyenlet. Ennek gyökei 5, 9 és 12 (közülük egyet 540 osztói közül való próbával kereshetünk ki, ezt leválasztva a további kettő már másodfokú egyenletből kapható), de (4)-ből $f+z$-re csak $p=9$ ad egész értéket.

Többen (3)-ban az $540=2^2\cdot3^3\cdot5$ felbontás alapján próbálkoztak, (1) alapján hozzávéve, hogy p, f és z közül kettő páratlan, így pedig a harmadik osztható 2^2-nel.