I. megoldás. Az utolsó napra maradt n éremből kiszámíthatjuk, mennyi maradt az előzőre, abból az előző nap kiadott érmek számát, és így haladva végül a versenyen kiadott összes érmek számát. Általában, ha a k-adik nap reggelén m_k érem volt és a nap folyamán d_k érmet adtak ki, akkor

$$d_k = k + \frac{m_k - k}{7} \qquad \text{és}$$

$$m_{k+1} = m_k - d_k = m_k - k - \frac{1}{7}(m_k - k) = \frac{6}{7}(m_k - k). \tag{1}$$

Innen m_k-t kifejezve m_{k+1}-gyel és a $7/6$ törtet q-val jelölve

$$m_k = k + q m_{k+1}.$$

Így kapjuk sorra, hogy

$$m_n = n,\ m_{n-1} = (n-1) + qn,\ m_{n-2} = (n-2) + q(n-1) + q^2 n,\ \ldots,$$

végül az összes (az első reggel még ki nem osztott) érmek száma

$$m = m_1 = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1}.$$

Ezt az összeget egyszerűbb alakra hozhatjuk úgy, hogy eggyel-eggyel kevesebb tagú mértani sorokra bontjuk, és e sorozatokat egyenként összegezzük:

$$\begin{aligned}
1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} &= \frac{q^n - 1}{q - 1},\\
q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} &= q \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} = \frac{q^n - q}{q - 1},\\
q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} &= q^2 \cdot \frac{q^{n-2} - 1}{q - 1} = \frac{q^n - q^2}{q - 1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q^{n-2} + q^{n-1} &= q^{n-2} \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1} = \frac{q^n - q^{n-2}}{q - 1},\\
q^{n-1} &= q^{n-1} \cdot \frac{q - 1}{q - 1} = \frac{q^n - q^{n-1}}{q - 1}.
\end{aligned}$$

Az egymás utáni összegek nevezője és számlálójának első tagja egyenlő, második tagjuk pedig rendre a fenti első sorozat megfelelő tagjának (-1)-szerese. Így az összegek összege, q értékét visszaírva és 6^{n+1}-nel bővítve

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{q-1}[ng^n - (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1})] = \frac{1}{q-1}\left(nq^n - \frac{q^n - 1}{q - 1}\right) =\\
&= \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2} = \frac{n \cdot 7^{n+1} - (n+1)7^n \cdot 6 + 6^{n+1}}{6^{n-1}} = \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}} + 6^2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Az utolsó alak első tagja egész szám kell, hogy legyen. Mivel 7^n és 6^{n-1} egymáshoz relatív primek, azért

$$\frac{n-6}{6^{n-1}} \tag{3}$$

egész szám. Azonban itt a számláló kisebb a nevezőnél, ugyanis $n - 1 > 0$, s így

$$6^{n-1} - 1 = (6-1)(6^{n-2} + 6^{n-3} + \ldots + 6 + 1) \geq 5 \cdot (n-1),$$

(a zárójelben minden tag helyébe 1-et írtunk). Innen

$$6^{n-1} \geq 1 + 5(n-1) > n - 1.$$

Másrészt n legalább 6, hiszen 6-szorosa az $n-1$-edik napon az $n-1$ érem kiosztása után maradt érmek hetedének (ami szintén egész kell, hogy legyen). A (3) szám tehát nem negatív, 1-nél kisebb és egész, így 0-nak kell lennie. Eszerint $n = 6$, és az érmek száma (2) alapján 36 lehet csak. Ez meg is felel, mert ekkor az egyes napokon kiosztott érmek száma

$$1 + \frac{36-1}{7} = 6, \qquad 2 + \frac{36 - 6 - 2}{7} = 6, \qquad 3 + \frac{36 - 2\cdot 6 - 3}{7} = 6,$$

$$4 + \frac{36 - 3\cdot 6 - 4}{7} = 6, \qquad 5 + \frac{36 - 4 \cdot 6 - 5}{7} = 6 \quad \text{és} \quad 36 - 5 \cdot 6 = 6.$$

Bogár Dezső (Tatabánya, Árpád gimn. III. o. t.)

II. megoldás. Keressünk összefüggést két egymás utáni napon kiadott érmek száma között. A fenti jelölésekkel (1) alapján

$$d_k = \frac{m_k}{7} + \frac{6}{7}k, \qquad \text{így} \qquad d_{k-1} = \frac{m_{k-1}}{7} + \frac{6}{7}k - \frac{6}{7},$$

ezekből

$$d_{k-1} - d_k = \frac{m_{k-1} - m_k}{7} - \frac{6}{7} = \frac{d_{k-1}}{7} - \frac{6}{7},$$

(4)
$$d_{k-1} = \frac{7}{6}d_k - 1.$$

Mármost $d_n = n$, így $d_{n-1} = \frac{7}{6}n - 1$, és ez egész szám, tehát n osztható 6-tal. Mivel $n > 1$, azért $n \geq 6$. Jelöljük a nem negatív $n-6$ számot α-val, így (4) alapján

$$d_{n-1} = \frac{7}{6}(\alpha + 6) - 1 = \frac{7}{6}\alpha + 6,$$

$$d_{n-2} = \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \alpha + 6, \; \ldots, \; d_1 = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} \cdot \alpha + 6.$$

d_1 csak úgy lehet egész szám, ha $\alpha = n - 6$ osztható 6^{n-1}-nel. Ez csak $\alpha = 0$ esetén lehet lehetséges, hiszen

$$\alpha = n - 6 < n - 1 < 1 + 6 \ldots + 6^{n-2} = \frac{6^{n-1} - 1}{6 - 1} < 6^{n-1},$$

így a megoldás: $\alpha = 0$, $n = 6$, $d_1 = d_2 = \ldots = d_6 = 6$, és $m = 36$.

Tusnády Gábor