Csak a páratlan n indexekkel foglalkozunk, hiszen minden páros n esetén a feltevés miatt $c_n > 0$. Az $a_1, a_2, \ldots, a_8$ számok között van vegyesen pozitív is, negatív is, különben a c_n sorozatnak egyetlen tagja sem lehetne 0. Az összeg kommutatív tulajdonsága alapján választhatjuk az indexeket úgy, hogy $|a_1|, \ldots, |a_8|$ között nincs nagyobb, mint $|a_8|$ – tehát $a_8 \neq 0$ –, továbbá, hogy az a_8-cal ellentétes előjelű tagok abszolút értékei között nincs nagyobb, mint $|a_7|$. Így egyrészt $a_7 \neq 0$, másrészt $|a_7| \leq |a_8|$. Megmutatjuk, hogy itt egyenlőség áll, vagyis $a_7 = -a_8$, $a_7 + a_8 = 0$.

Az eddigiek alapján c_n így alakítható:

$$c_n = a_8^n \left(\left(\frac{a_1}{a_8} \right)^n + \left(\frac{a_2}{a_8} \right)^n + \ldots + \left(\frac{a_7}{a_8} \right)^n + 1 \right), \tag{1}$$

ahol $a_7/a_8 = q < 0$. Ez a hányados egyik a_i/a_8-nál sem nagyobb, ha $i = 1, 2, \ldots, 6$. Másrészt páratlan n esetén az $y = x^n$ függvény monoton növekvő, ezért a nagy zárójelben az első 6 tag mindegyike helyére a hetedik tagot írva a kifejezés értéke csökken, vagy változatlan marad:

$$\left(\frac{a_1}{a_8} \right)^n + \ldots + \left(\frac{a_1}{a_8} \right)^n + 1 \geq 1 + 7q^n. \tag{2}$$

Ha mármost $|a_7| < |a_8|$, akkor n növekedésével a jobb oldal második tagja nő – mert negatív, és abszolút értékben csökken –, ezért egy bizonyos n_0 küszöbértéket átlépve a jobb oldal értéke mindig pozitív, tehát a bal oldalé is. Valóban

$$7q^n > -1, \qquad \text{ha} \quad |q|^n < \frac{1}{7}, \qquad n \lg |q| < -\lg 7,$$
$$n > -\frac{\lg 7}{\lg |q|} = \frac{\lg 7}{\lg \left| \dfrac{1}{q} \right|} = \frac{\lg 7}{\lg |a_8| - \lg |a_7|},$$

hiszen ekkor $0 < |q| < 1$, és így $\lg |q| < 0$, tehát küszöbértékként megfelel

$$n_0 = \left[\frac{\lg 7}{\lg |a_8| - \lg |a_7|} \right] + 1,$$

ahol a szögletes zárójel a benne álló hányados egész részét jelöli.

Ezek szerint minden az n_0-nál nagyobb index esetén (2) bal oldala pozitív, és (1) szerint c_n ugyanolyan előjelű, mint a_8, nem lehet tehát végtelen sok olyan n, amelyre $c_n = 0$. Így valóban $|a_7| = |a_8|$, amint állítottuk, és minden (páratlan) n-re $a_7^n + a_8^n = 0$, ennélfogva

$$c_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_6^n.$$

Ha mármost $a_1, a_2, \ldots, a_6$ között nincs 0-tól különböző, akkor minden páratlan n-re $c_n = 0$, és a kérdésre a választ megadtuk. Ha viszont a feltevés az $a_1, a_2, \ldots, a_6$ számokra is teljesül, meggondolásunkat és megállapodásainkat $n = 8$ és 7 helyén $n = 6$-tal és 5-tel, majd szükség esetén 4-gyel és 3-mal ismételve kapjuk, hogy $a_5 + a_6 = 0$, ill. $a_3 + a_4 = 0$, ennélfogva minden páratlan n-re $c_n = a_1^n + a_2^n$. És ha még a_1, a_2 közül sem mindegyik 0, akkor bármely olyan n-ből, amelyre $c_n = 0$, adódik $a_2^n = -a_1^n$ és $a_2 = -a_1$, hiszen páratlan kitevő esetén a gyökvonás (a valós számok körében) egyértelmű, és ekkor minden n-re $c_n = 0$. Így minden esetben minden páratlan n-re teljesül $c_n = 0$.

Komjáth Péter (Budapest, Fazekas M. gyak. gimn. I. o. t.)
Munk Sándor (Budapest, Rákóczi F. gimn. IV. o. t.)
Siklósi Miklós (Budapest, Berzsenyi D. gimn. III. o. t.)