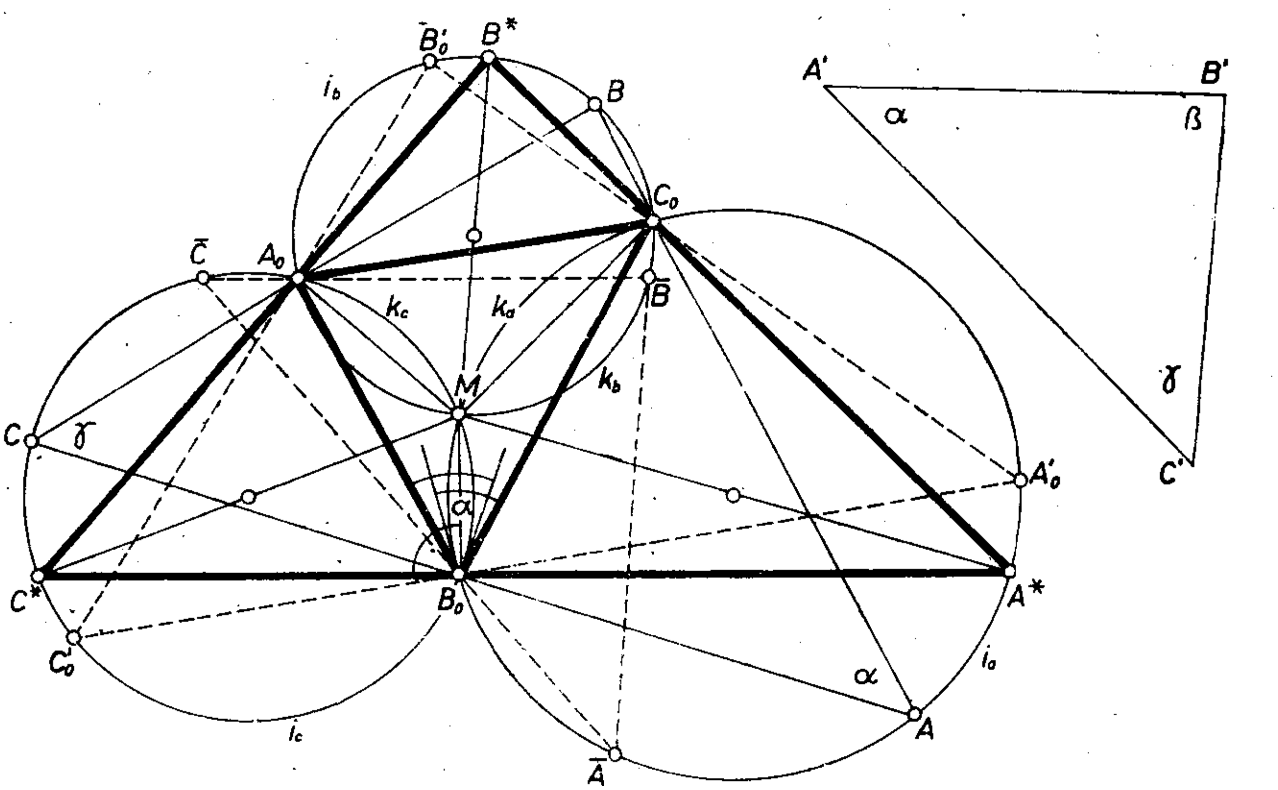
I. Egy az előírásoknak megfelelő ABC háromszöget a következő lépésekben keresünk. 1. Az $A_0B_0C_0 = H_0$ háromszög A_0B_0 és B_0C_0 oldala fölé, kifelé megszerkesztjük az $A'C'B'\sphericalangle = \gamma$, ill. $B'A'C'\sphericalangle = \alpha$ nyílású i_c, ill. i_a látószög körívet – ezen kell lennie a C, ill. A csúcsnak; 2. B_0-on át olyan egyenest veszünk fel, mely mindkét ívet metszi egy-egy belső pontjukban – és így természetesen kívül halad H_0-on –, legyen a metszéspont C, ill. A; 3. megkeressük a CA_0 és AC_0 egyenesek B metszéspontját.

Az így szerkesztett $ABC = H$ háromszögben C-nél γ, A-nál α nagyságú szög van, tehát $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$, csúcsaik a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak, és az AB, BC, CA egyenesek rendre átmennek a C_0, A_0, B_0 ponton.

Megjegyezzük, hogy a mondott B pont mindig azon a k_b körön adódik, amelynek A_0C_0 húrja, és B_0-lal ellentétes oldalon levő i_b ívének pontjaiból a húr $A'B'C'\sphericalangle = \beta$ szögben látszik. Ha ugyanis az adódó H tartalmazza H_0-t, akkor B az A_0C_0 egyenes B_0-t nem tartalmazó partján van, és belőle az A_0C_0 szakasz β szögben látszik; ha pedig H nem tartalmazza H_0-t, mert B az A_0C_0 egyenesnek B_0-t tartalmazó partján adódott – lásd az ábra $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ háromszögét, C_0 nincs rajta az $\overline{A}\,\overline{B}$ szakaszon, $\overline{B}\,\overline{C}$ átmetszi H_0-t, akkor B-ből az A_0C_0 szakasz $180^\circ - \beta$ szögben látszik, és ezért van rajta k_b-n.

Az $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ háromszögben látott példára tekintettel megmutatjuk, hogy mindig felvehető B_0-n át olyan egyenes, hogy a belőle szerkesztett ABC háromszög valódi körülírt háromszöge az $A_0B_0C_0$ háromszögnek. Ilyen a B_0-on átmenő, A_0C_0-lal párhuzamos egyenes. Ekkor ugyanis az A_0C, C_0A félegyenesek az A_0C_0 egyenes B_0-t tartalmazó oldalán vannak, az A_0C_0 szakasszal bezárt szögük rendre $180^\circ - \gamma$, $180^\circ - \alpha$, ezek összege $180^\circ + \beta > 180^\circ$, ezért a két félegyenes nem metszi egymást, csak visszafelé való meghosszabbításaik, tehát B az A_0C_0 egyenes B_0-t nem tartalmazó oldalán adódik, és H a belsejében tartalmazza H_0-t.



II. Azt is kaptuk, hogy tetszés szerinti számú, a követelményeknek megfelelő H háromszög szerkeszthető. Ezek egymáshoz is hasonlók, tehát közülük az a legnagyobb területű, amelyikben pl. a CA oldal hossza a legnagyobb.

Tekintsük az i_a és i_c íveket tartalmazó k_a, k_c körök B_0-tól különböző M metszéspontját. Ez mindkét ívnek a kiegészítő ívén, az $A_0B_0C_0$ szögtartományban van, mert a körök B_0-beli érintői a B_0C_0, B_0A_0 egyenessel rendre α, γ szöget zárnak be és e két szög átfedi egymást, mert a feltevés alapján

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma > 90^\circ > \beta_0 = A_0B_0C_0\sphericalangle$$

Ennélfogva C-nek i_c-n való mozgása közben az MCB_0 szög állandó, és ugyanez áll az MAB_0 szögre. Így pedig, H-t változtatva, az M-ben közös csúccsal bíró MAC háromszögek is hasonlók, és CA akkor a legnagyobb, ha MC a legnagyobb, vagyis ha C a k_c-nek M-mel átellenes C^* pontjában van.

Ezzel eljárást kaptunk a keresett legnagyobb területű $A^*B^*C^* = H^*$ háromszög megszerkesztésére: a C^*B_0 egyenes k_a-ból kimetszi A^*-ot, és a C^*A_0, A^*C_0 egyenespár metszéspontja B^*.

H^* megfelel az előbbi előírásoknak is, mert az MB_0C^* szög derékszög, tehát az MB_0A^* szög is $90°$. Így C^* az i_c-n, A^* az i_a-n van, hiszen γ és α hegyesszögek, az ívek nagyobbak félkörnél. Hasonlóan a B^*C^*, B^*A^* oldalszakasz tartalmazza A_0-t, ill. C_0-t. Ennek bizonyításához felhasználjuk, hogy – mint láttuk – B a k_b-n van, továbbá hogy k_b is átmegy M-en. Valóban, mint láttuk,

$$A_0MB_0\sphericalangle = 180° - \gamma > 90°, \qquad B_0MC_0\sphericalangle = 180° - \alpha > 90°,$$

ezért összegük $180°$ és $360°$ közé esik, M benne van H_0-ban, és $C_0MA_0\sphericalangle = 180° - \beta$, tehát M az i_b-t kiegészítő ív pontja. Ekkor pedig $A^*C_0M\sphericalangle = 90°$ miatt $MC_0B^*\sphericalangle = 90°$, tehát B^* a k_b-nek M-mel átellenes pontja.

Megjegyzés. H_0 hegyesszögű voltának felhasználása nélkül is belátható, hogy mindig húzható B_0-on át olyan AC egyenes, hogy a belőle kapott H háromszög valódi körülirt háromszöge H_0-nak.

Válasszunk egy alapirányt, járjuk körül H_0-t és H-t, és írjuk fel mindegyik oldaluknak mint félegyenesnek az irányszögét, vagyis azt, mekkora elfordulás viszi át az alapirányt az illető félegyenesbe, majd ezekből annak feltételeit, hogy H-nak mindhárom oldalegyenese H_0-on kívül haladjon.

Feltehetjük, hogy H_0 körüljárása pozitív, hiszen ezt – ha kell – két csúcs betűzésének fölcserélésével elérhetjük. Így H körüljárása is pozitív lesz, és az irányszög minden egyes csúcson áthaladva, az illető csúcsnál levő külső szöggel nő.

Legyen az alapirány az A_0B_0 félegyenes iránya, legyenek továbbá H_0 egymás utáni szögei α_0, β_0, γ_0 végül a CA félegyenes irányszöge φ. Így az irányszögek:

$$\begin{aligned}
A_0B_0 &: \ 0° \text{ (ill. egyszeri körüljárás után } 360°), \\
B_0C_0 &: \ 180° - \beta_0, \\
C_0A_0 &: \ (180° - \beta_0) + (180° - \gamma_0) = 180° + \alpha_0, \\
CA &: \ \varphi, \\
AB &: \ \varphi + 180° - \alpha, \\
BC &: \ (\varphi + 180° - \alpha) + (180° - \beta) = \varphi + 180° + \gamma.
\end{aligned}$$

A CA félegyenes H_0-on kívül halad, ha irányszöge A_0B_0 és B_0C_0 irányszöge közé esik:

$$0° < \varphi < 180° - \beta_0; \tag{1}$$

Hasonlóan az AB, BC félegyenesből

$$180° - \beta_0 < \varphi + 180° - \alpha < 180° + \alpha_0, \qquad 180° + \alpha_0 < \varphi + 180° + \gamma < 360°,$$

azaz φ-re megoldva

$$\alpha - \beta_0 < \varphi < \alpha + \alpha_0, \tag{2}$$

$$\alpha_0 - \gamma < \varphi < 180° - \gamma. \tag{3}$$

Mármost φ-nek bármelyik kapott felső korlátjából bármelyik másik kettős egyenlőtlenségbeli alsó korlátját kivonva pozitív különbséget kapunk, ugyanis a 6 különbség így alakítható:

$$180° - \alpha, \quad 180° - \beta, \quad 180° - \gamma; \quad \alpha_0 + \alpha, \quad \beta_0 + \beta, \quad \gamma_0 + \gamma,$$

ennélfogva a felső korlátok legkisebbike nagyobb az alsó korlátok legnagyobbikánál. Így pedig van az (1)–(3)-nak eleget tevő φ irányszög; ezt akartuk belátni. Tetszés szerinti H_0, H háromszög-pár esetén adódhat az $\alpha_0 > 180° - \gamma$ nagyságviszony; ekkor a hegyesszögek esetére fönt ajánlott $\varphi = \alpha_0$ irányszögű egyenes nem felelne meg.