I. Az (1) szorzat minden egyes tényezője két további tényező szorzatára bontható, $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén

$$
\begin{aligned}
c_{m+i} - c_k &= (m+i)(m+i+1) - k(k+1) = \\
&= \left[(m+i)^2 - k^2\right] + \left[(m+i) - k\right] = \\
&= (m-k+i)(m+k+i+1).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Így maga az (1) alatti P szorzat is írható két szorzat, P_1 és P_2 szorzataként, ahol P_1-be soroljuk minden egyes (3) alakú felbontás első tényezőjét, P_2-be pedig a másodikat, vagyis

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (m-k+1)(m-k+2)\ldots(m-k+n), \\
P_2 &= (m+k+2)(m+k+3)\ldots(m+k+n+1).
\end{aligned}
$$

A (2) alatti Q szorzat, minden egyes c_i tényezője helyére az értelmezés szerint $i(i+1)$-et írva, majd az előbbihez hasonló átcsoportosítással ugyancsak

$$
Q = c_1 c_2 \ldots c_n = \left[1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n\right] \cdot \left[2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)\right] = Q_1 \cdot Q_2,
$$

ahol Q_1-gyel az első, Q_2-vel a második szögletes zárójelbeli szorzatot jelöltük. A faktoriális ismert jelével $Q_1 = n!$, $\quad Q_2 = (n+1)!$. Így azt kell megmutatnunk, hogy a következő hányados:

$$
\frac{P}{Q} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2}
$$

egész szám. Ehhez belátjuk, hogy az utolsó alak mindkét tényezője egész.

II. P_1-ben n egymás utáni egész számot szorzunk össze. Állítjuk, hogy ez n!-sal osztva mindig egész számot ad hányadosul.

Ha $m+1 \le k \le m+n$, akkor P_1 tényezői között szerepel a 0, így a P_1/Q, hányados 0, állításunk igaz.

$k < m+1$ esetén P_1/Q_1 egész voltát úgy bizonyítjuk be, hogy megadunk egy feladatot, melynek megoldásáról egyrészt azt tudjuk, hogy egész szám, másrészt megmutatjuk, hogy egyenlő P_1/Q_1-gyel. Legyen $m-k+n = N$ így a feltevés szerint $N \ge n$.

A feladat a következő. Egy verseny első fordulóján N résztvevő indul, közülük az első n jut be a második fordulóba. Hányféleképpen alakulhat a második forduló mezőnye?

A válasz nyilvánvalóan egész szám. Adjuk meg a keresett számot először a II. fordulóba bejutók helyezési sorrendjét is figyelembe véve (holtversenyt kizárva). Az 1. helyezett N-féleképpen adódhat, a 2. helyezett a maradó $N-1$ résztvevő közül $N-1$-féleképpen, és így tovább, a $k+1$-edik lépésben a $k+1$-edik helyezett $N-k$-féleképpen adódhat, mert miután az első k díj már gazdát talált, a $k+1$-edik díj gazdája a még nem díjazott $N-k$ résztvevő közül kerül ki. így a II. forduló lehetséges helyezési sorrendjeinek száma

$$
N(N-1)\ldots(N-n+1), \tag{4}
$$

ami P_l-gyel egyenlő.

Az eredeti kérdésre most már úgy adhatjuk meg a választ, hogy a talált sorrendeket csoportosítjuk, egy csoportba gyűjtjük azokat, amelyekben ugyanazok a versenyzők kapják az első n díjat; mindegyik csoport egyetlen lehetőséget ad a II. forduló mezőnyének kialakulására. Így minden egyes csoportba annyi sorrend jut, ahányféleképpen ugyanaz az a díjazott az n díjon megosztozhat. Számuk annyi, mintha az első változatban az első a díjat n résztvevő között kellene kiosztani, vagyis (4) értéke $N = n$ esetére, ami $n! = Q_1$. Eszerint a csoportok száma P_1/Q_1 és ez – mint láttuk – egész szám. Ezt akartuk bizonyítani.

Ha végül $k > m+n$, akkor P_1 minden tényezője negatív egész szám, mindegyikből (-1)-et kiemelve n egymás utáni természetes szám szorzatát kapjuk (csökkenő rendben), ezért

$$
\frac{P_1}{Q_1} = (-1)^n \frac{|P_1|}{Q_1},
$$

egész szám.

III. A P_2/Q_2 hányados egész voltának bizonyításához eredményünket n helyén $n+1$-gyel alkalmazzuk a következő hányadosra:

$$
\frac{(m+k+1) \cdot P_2}{Q_2} = \frac{(m+k+1) \cdot P_2}{(n+1)!}. \tag{5}
$$

Ennek számlálója $n+1$ egymás utáni természetes szám szorzata, tehát a hányados egész. Így pedig P_2/Q_2 is egész, mert a számláló első tényezője törzsszám, és nagyobb $n+1$-nél, tehát nincs közös osztója Q_2 egyik tényezőjével sem; ezért, ha P_2/Q_2 tovább nem egyszerűsíthető alakjának nevezője nagyobb volna 1-nél, akkor ez maradna a nevezője (5) tovább nem egyszerűsíthető alakjának is.

Fenti tervünket teljesítettük, az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A P_1/Q_1 hányados egész voltát beláthatjuk úgy is, hogy gondolatban P_1 et is, Q_1-et is különböző alapú törzsszámhatványok szorzataként előállítva minden egyes, az n!-ban fellépő törzsszámról megmutatjuk: a számlálóban legalább ugyanakkora kitevővel szerepel, mint a nevezőben.[1]

[1] Efféle gondolatmenet olvasható a következő helyen: *Kürschák József – Hajós György – Neukomm Gyula – Surányi János.* Matematikai Versenytételek, I. rész, 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1964, 124. o. 1925/2. feladat.