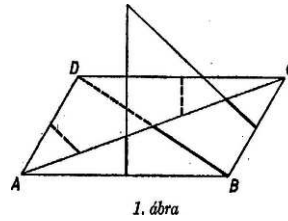


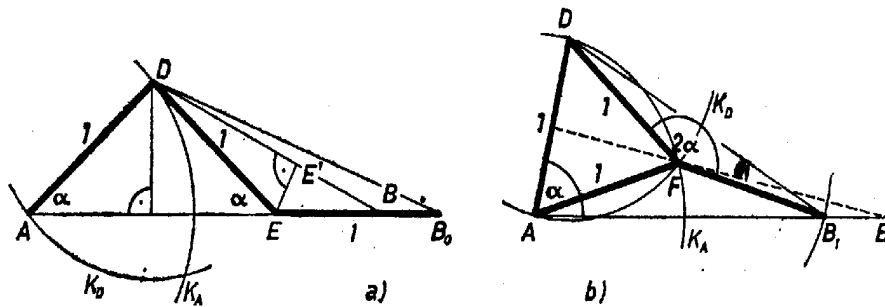
I. A feladat feltételei közül egyelőre csak annyit használunk fel, hogy  $\alpha$  hegyesszög. Így az  $ABC$  háromszögben  $B$ -nél tompaszög van, az  $AB$  és  $BC$  szakaszok felező merőlegesei a háromszögön kívül metszik egymást, az  $AC$  oldalt az előbbi  $A$ -hoz közelebb, az utóbbi  $C$ -hez közelebb metszi (1. ábra).



1. ábra

Ez a két felező merőleges tehát olyan három részre vágja az  $ABC$  háromszöget, hogy mindegyik rész belső pontjaihoz az illető rész által tartalmazott csúcs van a háromszög csúcsai közül a legközelebb. A  $BD$  szakasznak a háromszögbe eső része a  $B$ -hez tartozó részben fut, mert végpontja egyenlő távolságra van  $A$ -tól és  $C$ -től. Hasonló állítás igaz az  $ACD$  háromszögre is, így az  $ABD$  háromszög pontjaihoz az  $A, B, C, D$  pontok közül az  $A, B, D$  csúcsok valamelyike van legközelebb – elegendő tehát annak a szükséges és elegendő feltételét megvizsgálnunk, hogy az  $ABD$  háromszöget a  $K_A, K_B, K_D$  körök lefedjék.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy  $\alpha$   $60^\circ$ -nál kisebb-e vagy nagyobb. Ha  $0 < \alpha \leq 60^\circ$ , a  $K_A$  körnek a  $BAD$  szögtartományba eső része egyszersmind a  $K_D$  körnek is része, így csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a  $K_B, K_D$  körök mikor fedik le az  $ABD$  háromszöget.  $a > 1$  esetén a  $K_B$  kör az  $AB$  szakaszból egységnyi hosszúságú részt vág le, a  $K_D$  körből az  $AB$  egyenesre eső húr hossza pedig  $2 \cos \alpha$ .



2. ábra

Ha e két kör lefedi az  $AB$  szakaszt, e részek összege nem kisebb az  $AB$  szakasz hosszánál (2a ábra):

$$(2) \quad a \leq 2 \cos \alpha + 1.$$

Ez  $a \leq 1$  esetén is teljesül, tehát  $0 < \alpha \leq 60^\circ$  mellett a fedés szükséges feltétele. Feltételünk úgy is fogalmazható, hogy az  $ABD$  háromszög része legyen annak az  $AB_0D$  háromszögnek, melyben  $AB_0 = 2 \cos \alpha + 1$ . Messe  $K_D$  az  $AB$  egyenest  $E$ -ben, akkor  $AD = DE = EB_0 = 1$ .

Megmutatjuk, hogy (2) elégséges feltétel. Valóban,  $K_D$  lefedi az  $AED$  háromszöget, így ha  $B$  az  $AE$  szakaszon van,  $K_D$  maga lefedi az  $ABD$  háromszöget. Ha  $B$  az  $EB_0$  szakaszon van,  $K_B$  lefedi  $E$ -t  $EB \leq 1$  miatt. Legyen  $E$  vetülete  $BD$ -n  $E'$ , akkor az  $EBE'$  háromszöget a  $K_B$  kör, az  $EE'D$  háromszöget a  $K_D$  kör fedi le, hiszen pl. az  $EBE'$  háromszögben a  $B$ -től legtávolabbi pont az  $E$  csúcs, és  $K_B$  azt is lefedi.

Ha  $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , legyen az  $AD$  egyenes  $B$ -t tartalmazó oldalán  $F$  az a pont, melyre  $AF = DF = 1$ . Messe az  $F$  körüli egységsugarú  $K_F$  kör az  $AB$  egyenest  $B_1$ -ben. Az  $AB_1F$  egyenlő szárú háromszögben  $B_1AF \sphericalangle = \alpha - 60^\circ$ , ezért (2b ábra)

$$AB_1 = 2 \cos(\alpha - 60^\circ) = \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha.$$

Így pedig a feladat állításában szereplő (1) feltétel esetünkben ekvivalens azzal, hogy  $B$  az  $AB_1$  szakaszon legyen, vagyis az  $AB_1D$  háromszög tartalmazza az  $ABD$  háromszöget. Megmutatjuk, hogy  $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  mellett ez szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a  $K_A, K_B, K_D$  körök lefedjék az  $ABD$  háromszöget.

Feltételünk elégséges, hiszen ha  $B$  az  $AB_1$  szakaszon van, az  $F$  pontot mindhárom kör lefedi, és ebből a fentiekhez hasonlóan látható be, hogy a  $K_A$  és  $K_B$  körök együtt lefedik az  $AFB$  háromszöget,  $K_B$  és  $K_D$  együtt a  $BFD$  háromszöget,  $K_A$  és  $K_D$  pedig együtt az  $AFD$  háromszöget fedik le. (Természetesen nem okoz zavart, ha  $F$  nincs is benne az  $ABD$  háromszögben.)

Fordítva, ha  $B$  az  $AB_1$  szakasz  $B_1$ -en túli meghosszabbításán van, az  $FB$  egyenes a  $K_A, K_D$  körök belsejében levő  $AD$  szakaszt annak belsejében metszi, így  $F$  az  $ABD$  háromszög belsejében van, és a  $K_A, K_D$  körök az  $FB$  szakasznak

csak az  $F$  végpontját fedik le.  $B$  viszont a  $K_F$  körön kívül van, tehát  $FB > 1$ , így az  $FB$  szakaszt nem fedheti le teljes egészében a  $K_B$  kör. Eszerint feltételünk szükséges is.

Összefoglalva az eddigieket: ha az  $ABD$  háromszög tetszőleges, akkor  $0 < \alpha \leq 60^\circ$  esetén (2),  $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  esetén (1) a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a  $K_A, K_B, K_C, K_D$  körök lefedjék az  $ABCD$  paralelogrammát.

II. Utolsó lépésként megmutatjuk, hogy ha  $0 < \alpha \leq 60^\circ$ , és az  $ABD$  háromszög hegyesszögű, akkor (1) is, (2) is mindig teljesül. Valóban, a 2a ábrán  $ADB_0 \sphericalangle = 180^\circ - 3\alpha/2$ , a 2b ábrán  $ADB_1 \sphericalangle = 150^\circ - \alpha$ , tehát  $0 < \alpha \leq 60^\circ$  mellett mindkettő tompaszög; ha tehát az  $ABD$  háromszögben  $D$ -nél hegyesszög van, az  $AB_0D$ , ill. az  $AB_1D$  háromszög tartalmazza az  $ABD$  háromszöget.

Ha tehát  $0 < \alpha \leq 60^\circ$ , és az  $ABD$  háromszög hegyesszögű, köreink mindig fedik a paralelogrammát, és az (1) feltétel is mindig teljesül, így hegyesszögű  $ABD$  háromszög esetén (1) az egész  $0 < \alpha < 90^\circ$  intervallumban szükséges és elégséges feltétele a fedésnek.

*Megjegyzés.* Hasonló módon látható, hogy ha az  $ADB \sphericalangle$  tompaszög, és  $60^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ , akkor a körök sosem fedik az  $ABCD$  paralelogrammát.