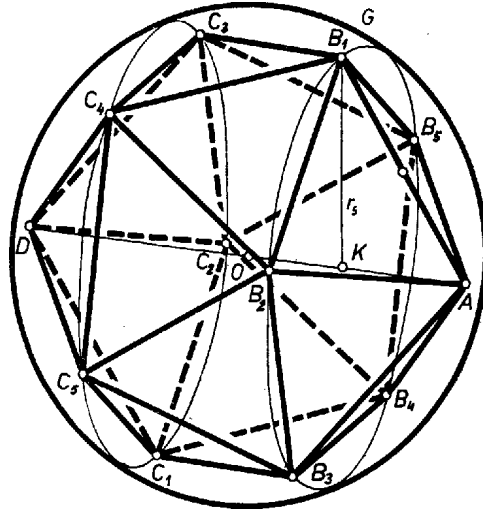


a) Az 1472. feladatban vizsgált I szabályos ikoszaédernek 20 szabályos háromszöglapja van, egységnyi oldalakkal, a szerkesztésben felhasznált $B_1B_2B_3B_4B_5$ és $C_1C_2C_3C_4C_5$ ötszögek mindegyik oldalában 2 – 2 háromszög fut össze (A és a C csúcsok felé, ill. D és a B csúcsok felé), és ezzel minden lapot egyszer vettünk számba.



Térfogatának kiszámításához szétvágjuk a testet mindazon háromszögek mentén, melyeknek egyik oldala a testnek egy éle, ezzel szemben fekvő csúcsa pedig a test köré írt G gömbnek O középpontja. Így I szétesik 20 háromoldalú gúlára. E gúlák egybevágók, hiszen ez áll alapháromszögeikre, másrészt oldallapjaikra is, amelyek egyenlő szárú háromszögek, száruk G -nek r sugarával egyenlő. A gúlák magassága annyi, mint I bármelyik lapjának O -tól való d távolsága. Ezt abból számíthatjuk, hogy az I lapjai köré írt körök egyszerismind G -nek síkmetszetei, és sugaruk az egységnyi oldalú szabályos háromszög magasságának $2/3$ része: $r_3 = (\sqrt{3}/2) \cdot (2/3) = 1/\sqrt{3}$, másrészt hogy az idézett feladat szerint

$$r = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}, \quad \text{tehát} \quad d^2 = r^2 - r_3^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} - \frac{1}{3} = \frac{14 + 6\sqrt{5}}{48} = \frac{1}{3} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4} \right)^2,$$

ennélfogva az ikoszaéder térfogata

$$V = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12} \quad (\approx 2,18)$$

térfogategység (a térfogategységnyi kocka éle egyenlő I élével).

b) Az 1440. feladathoz fűzött megjegyzés szerint a tv-labda előállítható a szabályos ikoszaéderből úgy, hogy ennek mindegyik élét 3 egyenlő részre osztjuk, mindegyik csúcsból kiinduló 5 él közelebbi harmadoló pontjain át síkot fektetünk, és eltávolítjuk a testről azt a szabályos ötoldalú gúlát, amely így a síknak O -t nem tartalmazó oldalán keletkezett. 5 ilyen pont valóban mindig egy síkban van, mert pl. az A -ból kiinduló élek végpontjai a $B_1B_2B_3B_4B_5 = \tilde{O}$ (síkbeli) ötszöget alkotják, a mondott 5 pont pedig ennek $1/3$ arányú kicsinyített képe, A -ból mint hasonlósági középpontból, tehát rajta van azon a síkon, amely \tilde{O} síkjával párhuzamos és átmegy az AK szakasz A -hoz közelebbi harmadoló pontján.

Vegyük hosszúságegységnek a tv-labda élét, ekkor 3 egységnyi élű ikoszaéderből kell kiindulnunk, ennek térfogata $27V$, ahol V az a) részben kapott térfogat.

A lemetezett gúla ekkor egybevágó az 1472. feladatbeli $A\tilde{O}$ gúlával. Ezt az AKB_i háromszögek mentén ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 5 egybevágó háromoldalú gúlára daraboljuk. Az idézett feladat szerint közös magasságuk, valamint az \tilde{O} köré írt kör r_5 sugara, a KB_iB_{i+1} egyenlő szárú háromszög szára

$$m = AK = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) r = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}, \quad r_5 = B_iK = \frac{2}{\sqrt{5}} r = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}},$$

így e háromszögek m_5 magasságára

$$m_5^2 = r_5^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{20},$$

ennélfogva az $A\tilde{O}$ gúla térfogata:

$$V_g = 5 \cdot \frac{1}{2} m_5 \cdot \frac{m}{3} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{200}} = \frac{\sqrt{30 + 10\sqrt{5}}}{24} = \frac{5 + \sqrt{5}}{24}.$$

Az ikoszaédernek 12 csúcsa van, így a tv-labda térfogata

$$27V - 12V_g = \frac{135 + 45\sqrt{5}}{4} - \frac{5 + \sqrt{5}}{2} = \frac{125 + 43\sqrt{5}}{4} \quad (\approx 55,3 \text{ térfogategység}).$$

Erdődi György (Szeged, Rózsa F. g. III. o. t.)

Bajmóczy Ervin (Budapest, Ady E. Ált. Isk. 8. o. t.)

Megjegyzések. 1. V_g -t megkapjuk abból is, hogy vesszük azt az 5 gúlát, amely I térfogatának számításában az $A\ddot{O}$ gúla oldallapjain áll, és közös negyedik csúcsuk O . Ez \ddot{O} alapú kettős gúla, és két része térfogatának aránya $KA : KO$, ami a szabályos ötszög szerkesztése szerint $(\sqrt{5} - 1) : 1$. A kettős gúla térfogata $V/4$, így

$$v_g = \frac{V}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{(\sqrt{5} - 1) + 1} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{48} \cdot (\sqrt{5} - 1) = \frac{5 + \sqrt{5}}{24}.$$

2. A labda térfogata számítható az a) részben alkalmazott szétdarabolás mintájára is, mint 20 db szabályos hatoldalú és 12 db szabályos ötoldalú gúla térfogatának összege. Ezek oldaléle egyenlő, ti. a labda csúcsainak a származtató ikoszaéder középpontjától való távolsága, az ötoldalú gúlák magassága azonban nagyobb a hatoldalúakénál, mert az egységnyi oldalú ötszög köré írt kör sugara kisebb, mint a hatszög köré írt köré. (A hatoldalú gúlák magassága az a) részben felhasznált d távolságnak, I beírt gömbje sugarának 3-szorosa.) Ez a számolás bonyolultabb.