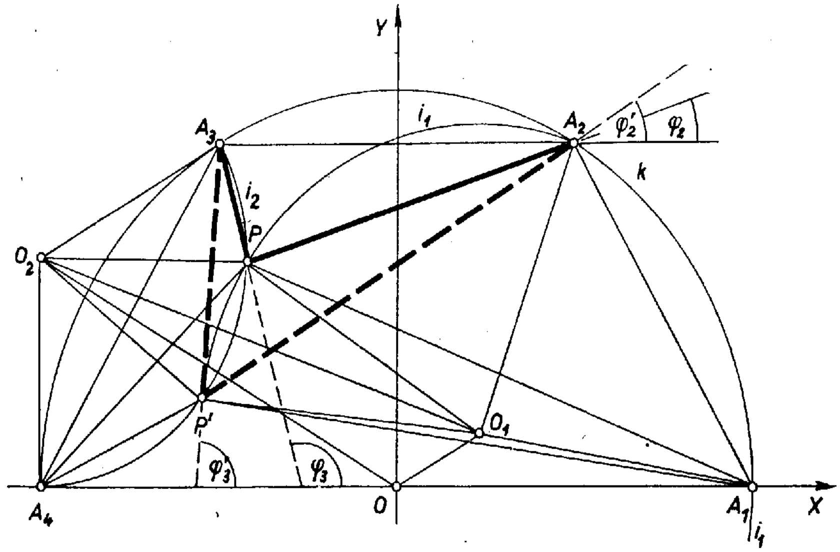

I. megoldás. A keresett P pont az A_1A_2 szakasz 40° nyílású látókörívpárjának az A_3A_4 szakasz 120° nyílású látókörívpárjával közös pontja. Elég venni azonban az ívpárokból azt az ívet, amely a szakasznak azon a partján van, mint az $A_1A_2A_3A_4 = N$ négyszög, hiszen a 120°-os íveket az A_1A_2 egyenestől elválasztja a vele párhuzamos A_3O egyenes – ahol O a szabályos hatszög középpontja, másrészt a 40°-os ív benne van a hatszög k körülírt körében – hiszen az utóbbinak pontjaiból A_1A_2 látószöge csupán 30°, a 120°-os ívpárnak N-en kívüli tagja viszont k-n is kívül van, mert az A_3A_4 ív pontjaiból 150° a látószög.

A megtartott i_1, i_2 látókörívek az ábra szerint két pontban metszik egymást, legyenek ezek P és P' úgy, hogy $PA_3 < P'A_3$, legyen i_1, i_2 középpontja O_1, ill. O_2.

Az A_2PA_3 látószög céljára kiszámítjuk a PA_2A_3 háromszög másik két szögét.

$$PA_3A_2\sphericalangle = A_4A_3A_2\sphericalangle - A_4A_3P\sphericalangle = 120^\circ - A_4O_2P\sphericalangle/2 = \tag{1}$$
$$= 120^\circ - (A_4O_2O\sphericalangle + OO_2O_1\sphericalangle + O_1O_2P\sphericalangle)/2.$$
$$PA_2A_3\sphericalangle = A_1A_2A_3\sphericalangle - A_1A_2P\sphericalangle = 120^\circ - A_1O_1P\sphericalangle/2, \tag{2}$$

az utolsó szögön a P' pontot tartalmazó konkáv szög értendő:

$$A_1O_1P\sphericalangle = A_1O_1O\sphericalangle + OO_1O_2\sphericalangle + O_2O_1P\sphericalangle.$$

A felhasználandó szögeket az OO_2A_4, OO_1O_2, O_1O_2P és OO_1A_1 háromszögekből számítjuk.

OO_2A_4 derékszögű háromszög, mert i_2 kiegészítő ívéről i_2-t 60°-os szögben látni, és ugyanakkora az $A_3A_4O\sphericalangle$, ezért A_4O érinti i_2-t. Továbbá $A_4OO_2\sphericalangle = 30^\circ$, mert A_3A_4 a k és i_2 közös húrja, így $A_4O_2O\sphericalangle = 60^\circ$. A szabályos hatszög oldalát a-val jelölve $O_2A_4 = O_2P = a/\sqrt{3} = 0{,}5774\ a$, $O_2O = 2a/\sqrt{3}$.

Az OO_1A_1 háromszögben O-nál 30°-os, O_1-nél $180^\circ - A_1O_1A_2\sphericalangle/2 = 180^\circ - A_1PA_2\sphericalangle = 140^\circ$-os szög van, tehát $OA_1O_1\sphericalangle = 10^\circ$, így $OO_1 = a\sin 10^\circ/\sin 40^\circ = 0{,}2701a$, $A_1O_1 = PO_1 = a/2\sin 40^\circ = 0{,}7779a$.

$O_1OO_2\sphericalangle = 120^\circ$, így a koszinusz–tétellel $O_1O_2 = 1{,}311a$, a szinusz–tétellel $OO_1O_2\sphericalangle = 49{,}72^\circ$, és így $OO_2O_1\sphericalangle = 10{,}28^\circ$.

Az O_1O_2P háromszög szögeit a félszög–képletekkel számítjuk az oldalakból: $O_2O_1P\sphericalangle = 12{,}64^\circ$, $O_1O_2P\sphericalangle = 17{,}14^\circ$ (vagy a koszinusz–tétel alapján).

Eredményeinket beírva (1)-be és (2)-be

$$A_2PA_3\sphericalangle = 180^\circ - PA_2A_3\sphericalangle - PA_3A_2\sphericalangle = 180^\circ - 18{,}82^\circ - 76{,}29^\circ = 84,49^\circ.$$

P' a P-nek tükrös párja O_1O_2-re, ezért az innen vett látószög céljára az O_1O_2P és az O_2O_1P szöget hozzáadás helyett kivonjuk: $A_2P'A_3\sphericalangle = 55{,}11^\circ$.

A dolgozatok többsége koordináta–geometriai úton oldotta meg a feladatot (ahogyan az országos felmérésben, az ún. háromszögelésben is a pontokat koordinátáikkal tekintik meghatározottnak). Ilyen a következő.

II. megoldás (vázlat). Legyen a derékszögű koordinátarendszer X-tengelye az A_4A_1 egyenes, origója az A_4A_1 szakasz felezőpontja, hosszúságegysége az OA_1 szakasz. A fenti jelöléseket tovább is használjuk. OO_1 egyenlete $y = x\cdot\mathrm{tg}\ 30^\circ$, A_1O_1 egyenlete $y = (x-1)\cdot\mathrm{tg}(-10^\circ)$, ezek metszéspontjaként O_1 koordinátái 3 tizedes pontossággal: (0,234; 0,135), és az i_1-et tartalmazó kör egyenlete:

$$(x-0{,}234)^2 + (y-0{,}135)^2 = 0{,}6051.$$

Hasonlóan az i_2-t tartalmazó kör egyenlete:

$$(x+1)^2+(y-1/\sqrt{3})^2=1/3.$$

Metszéspontjaik koordinátái:

$$P(-0{,}432,\ 0{,}551), \qquad P'(-0{,}538,\ 0{,}231),$$

Másrészt

$$A_2(0{,}5, \quad 0{,}866), \qquad A_3(-0{,}5, \quad 0{,}866),$$

így a keresett pontból az előírt pontokba mutató félegyenes iránytangense, majd irányszöge PA_3 esetén

$$\operatorname{tg}\,\varphi_3=\frac{0{,}866-0{,}551}{-0{,}500+0{,}432}=-\frac{0{,}315}{0{,}077}=-4{,}09, \qquad \varphi_3=103{,}7^\circ.$$

Hasonlóan PA_2 irányszöge $\varphi_2=18{,}9^\circ$, ezekből $A_2PA_3\sphericalangle=\varphi_3-\varphi_2=84{,}8^\circ$, másrészt P' esetére $A_2P'A_3\sphericalangle=\varphi_3'-\varphi_2'=86{,}6^\circ-31{,}4^\circ=55{,}2^\circ$.

Zambó Péter (Miskolc, Földes F. g. II. o. t.)
Horváth Sándor (Budapest, I. István g. III. o. t.)

III. megoldás. Az I. megoldás szerint P az N belsejében van, így az egymás utáni oldalak P-ből vett látószögeinek összege 360°. Legyen $A_2PA_3\sphericalangle=x$, továbbá $PA_3A_4\sphericalangle=y$; ekkor $A_4PA_1\sphericalangle=360^\circ-(40^\circ+x+120^\circ)=200^\circ-x$, $PA_4A_3\sphericalangle=60^\circ-y$, $PA_4A_1\sphericalangle=y$, $PA_1A_4\sphericalangle=x-20^\circ-y$, másrészt $PA_3A_2\sphericalangle=120^\circ-y$, $PA_2A_3\sphericalangle=60^\circ+y-x$, $PA_2A_1\sphericalangle=x+60^\circ-y$.

A PA_1A_2 és PA_1A_4 háromszögekből a színusz–tétel, majd az addíció–tétel alapján kifejezhetjük y-t;

$$\frac{\sin PA_2A_1\sphericalangle}{\sin A_2PA_1\sphericalangle}=\frac{\sin(x+60^\circ-y)}{\sin\ 40^\circ}=\frac{PA_1}{A_2A_1}=\frac{2\cdot PA_1}{A_4A_1}=\frac{2\sin PA_4A_1\sphericalangle}{\sin A_4PA_1\sphericalangle}=$$
$$=\frac{2\sin y}{\sin(200^\circ-x)},\ \text{vagyis}$$

$$\frac{\sin(x+60^\circ-y)}{\sin y}=\sin(x+60^\circ)\ \operatorname{ctg}\,y-\cos(x+60^\circ)=\frac{2\sin 40^\circ}{\sin(200^\circ-x)},$$

(3) $$\operatorname{ctg}y=\operatorname{ctg}(x+60^\circ)+\frac{2\sin 40^\circ}{\sin(200^\circ-x)\sin(x+60^\circ)}.$$

Másrészt hasonlóan a PA_4A_1 és PA_4A_3 háromszögekből

$$\frac{\sin PA_1A_4\sphericalangle}{\sin A_1PA_4\sphericalangle}=\frac{\sin(x-20^\circ-y)}{\sin(200^\circ-x)}=\frac{PA_4}{A_1A_4}=\frac{PA_4}{2\cdot A_3A_4}=\frac{\sin y}{2\sin 120^\circ}=$$
$$=\frac{\sin y}{\sqrt{3}},\ \text{vagyis}$$

$$\frac{\sin\left[(x-20^\circ)-y\right]}{\sin y}=\sin(x-20^\circ)\operatorname{ctg}y-\cos(x-20^\circ)=\frac{\sin(200^\circ-x)}{\sqrt{3}},$$

amiből, felhasználva, hogy $\sin(200^\circ-x)=-\sin(20^\circ-x)=\sin(x-20^\circ)$,

(4) $$\operatorname{ctg}y=\operatorname{ctg}(x-20^\circ)+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(3)és (4) jobb oldalából az első tagok különbsége

$$\operatorname{ctg}(x+60^\circ)-\operatorname{ctg}(x-20^\circ)=\frac{\sin\left[(x-20^\circ)-(x+60^\circ)\right]}{\sin(x+60^\circ)\sin(x-20^\circ)}=\frac{-\sin 80^\circ}{\sin(x+60^\circ)\sin(x-20^\circ)},$$

a nevező azonos (3) második tagja nevezőjével és a $2\sin u\sin v=\cos(u-v)-\cos(u+v)$ azonosság felhasználásával így alakul: $\left[\cos 80^\circ-\cos(2x+40^\circ)\right]/2$, ezért (3) és (4) különbségéből

$$\frac{4\sin 40^\circ-2\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ-\cos(2x+40^\circ)}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\cos(2x+40^\circ)=\cos 80^\circ-4\sqrt{3}\sin 40^\circ(1-\cos 40^\circ)=-0{,}8682,$$
$$2x+40^\circ=180^\circ\pm 29{,}74^\circ,$$
$$x_1=84{,}87^\circ,\ \ x_2=55{,}13^\circ.$$

Sulyok Elza (Nagybátony–Bányaváros, Gimn., II. o. t.)