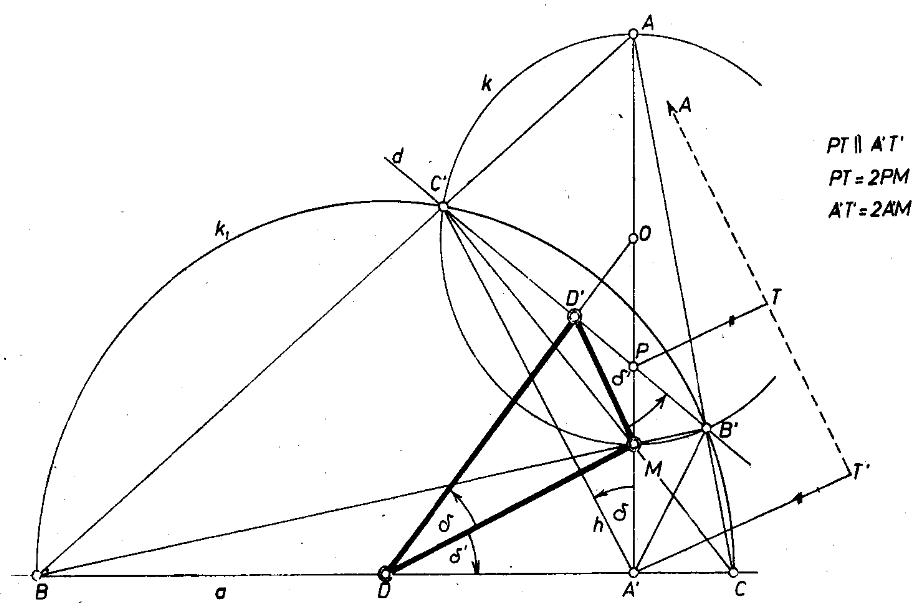
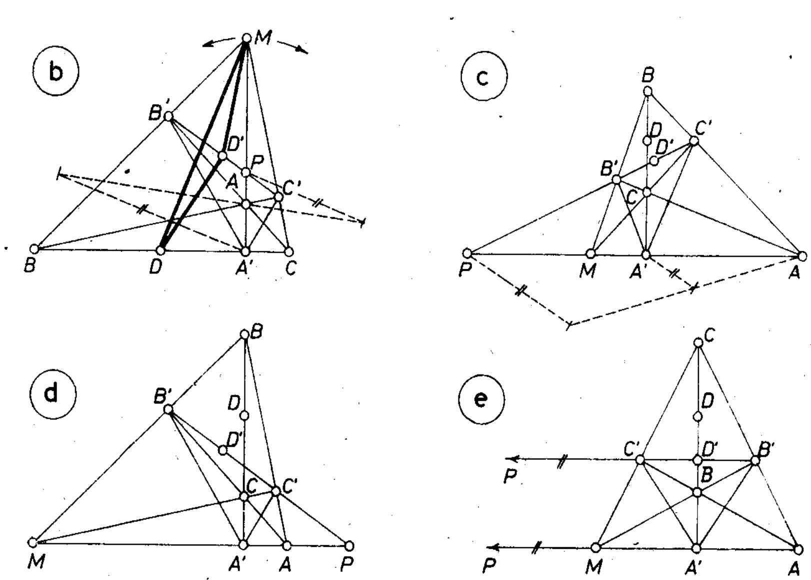
a) Ismeretes, hogy az ABC háromszög 3 oldalegyenese és 3 magasságegyenese felezi az $A'B'C'$ talpponti háromszög belső és külső szögeit – természetesen amennyiben a talpponti háromszög létrejön, vagyis ha az eredeti háromszög nem derékszögű. Pontosabban: hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének belső szögeit a 3 magasságegyenes felezi (ennélfogva a rájuk rendre merőlegesen álló oldalegyenesek a külső szögeket felezik), tompaszögű háromszög talpponti háromszögében a tompaszöget alkotó 2 oldalegyenes és a tompaszög csúcsából kiinduló magasság játsszák a belső szögfelezők szerepét (1. *a, b, c* ábra, az $A'B'C'$ háromszög beírt körének középpontja rendre M, a tételben kiemelt A csúcs, ill. C).



1.a. ábra

Tekintsük az $A'A$ szögfelezővel kettévágott talpponti háromszögnek $C'A'P$ részháromszögét, és alkalmazzuk ennek C'-ből kiinduló $C'M$ és $C'A$ szögfelezőire a szögfelezők osztásarányára vonatkozó tételt (1. *a* és *b* ábra, csupán A és M külső, ill. belső szerepe cserélődik fel):

$$\frac{A'M}{PM} = \frac{A'C'}{PC'} = \frac{A'A}{PA}.$$



1.b – e ábrák

A két szélső arány egybevetéséből rendezéssel kapjuk (1)-et. Ugyanez az 1. *c* és 1. *d* ábra esetében is érvényes, itt a $C'A'P$, ill. a $B'A'P$ háromszög magában tartalmazza a talpponti háromszöget. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. (Ha P nem jön létre (pl. 1. *e* ábra), mert $B'C' \perp BC$, tehát $B'C' \| AA'$, akkor az állítás tárgytalan.)

A kívánt szerkesztés céljára megállapítjuk, hogy M és A egyike az $A'P$ szakaszon van – ti. közülük a belső szögfelezőn levő pont –, másika pedig az $A'P$ szakasz meghosszabbításán, ennélfogva fordítva is, az A', P pontpár egyike belső pontja az AM szakasznak, másika pedig e szakasz meghosszabbításán van.

b) Az (1) alapján adandó szerkesztésben – az 1447. feladat betűzését megtartva – a BC és a $B'C'$ oldal D, ill. D' felezőpontját tekintjük adottnak. Az ottani I. és II. megoldásból felhasználjuk, hogy egyrészt $B'C' \perp DD'$, másrészt hogy MDC és $MD'B'$ hasonló háromszögek, és megfelelő csúcsaik egymás utáni körüljárásában az irány egymással ellentétes, ezért a DM félegyenest DC-be átvivő elfordulás egyenlő és ellentétes irányú a $D'M$-et $D'B'$-be átvivő elfordulással.

2. Ezek alapján megrajzoljuk a $B'C' = d$ egyenest, ebből a közte és MD' között levő szög átmásolásával a $BC = a$ egyenest, és ekkor az M-ből a-ra állított merőleges, az AA' magasságegyenes, kimetszi $B'C'$-ből P-t, BC-ből A'-t.

Ezután az A', P, M ponthármashoz megszerkesztjük az (1)-nek eleget tevő A pontot, figyelembe véve a négy pont kölcsönös helyzetéről fent mondottakat.

Az A pont meghatározását megkönnyíti a következő észrevétel: az ABC háromszögben az AM és a BC szakaszok fölé rajzolt k, k_1 Thalész-körök átmennek a B', C' pontokon, így centrálisuk nem más, mint a $B'C'$ közös húr felező merőlegese, vagyis a DD' egyenes. Emiatt a DD' egyenes az $A'M$ egyenest az AM szakasz O felezőpontjában metszi.

Legyen DD' és $A'M$ metszéspontja O, és az O középpontú, M-en átmenő kör k, ebben M-nek átellenes pontja A. k-nak d-vel alkotott metszéspontjait tetszőleges sorrendben B'-nek, C'-nek véve, kapjuk az AB', AC' oldalegyeneseket, melyekből az MC', MB' magasságvonalak metszik ki a C, B csúcsokat.

Mivel k_1-ben BC átmérő, $B'C'$ húr, így $BC > B'C'$, és az MBC, $MB'C'$ háromszögek hasonlósága miatt $MD > MD'$ következik. Ez tehát a szerkeszthetőség szükséges feltétele. Ez a feltétel nem zárja ki M és D' egybeesését, amikor – mint azt korábbi megoldásainkban láttuk – derékszögű háromszöget kapunk, végtelen sok megoldás van.

Szerkesztésünk helyességének a vizsgálatánál feltesszük, hogy D, D', M különböző pontok, és $MD > MD'$, továbbá hogy M nincs rajta a DD' egyenesen. Ekkor szerkesztésünk szerint a d és a egyenesek meghatározhatók. Ha M a d egyenesen van, akkor a is átmegy M-en szerkesztésünk szerint, és A', valamint P azonos M-mel. Az $A'M$ egyenesnek ebben az esetben az M-ben a-ra emelt merőleges felel meg, és mivel az $a = MD$ egyenes nem merőleges DD'-re, O ebben az esetben is meghatározható.

Ha M nincs rajta d-n, akkor az a-n levő A' vetülete M-től különböző pont. Megmutatjuk, hogy az a forgatás, mely a DM egyenest DD'-be viszi, az $A'M$ egyenest MD'-vel párhuzamos h helyzetbe viszi. Valóban, MD-t először D körül δ-val elforgatva $D'D$-be jutunk, majd 90°-kal elforgatva d-be, végül δ'-vel elforgatva MD'-be. Ha e három forgatást más sorrendben hajtjuk végre, nevezetesen MD-t először δ'-vel forgatjuk el, akkor a-t kapjuk, majd 90°-kal elforgatva kapjuk MA'-t, végül ezt az egyenest δ-val forgatva kapjuk h-t. E három forgatás végeredménye – irány szempontjából – nem függ sorrendjüktől, tehát h párhuzamos MD'-vel, vagyis az $A'M$ egyenest M körül δ-val elforgatva az MD' egyenest kapjuk. Mivel a $\delta = MDD'\sphericalangle$ kisebb a $DD'M$ szögnél (hiszen $MD' < MD$), az $A'M$ egyenes a DD' egyenest a D'-n túli meghosszabbításában metszi. Így az O pont mindig létrejön, és D' az OD szakaszon van.

Az MOD' háromszög D'-nél levő szöge a $DD'M$ háromszög külső szöge, így nagyobb az MDD', és az azzal egyenlő OMD' szögnél, ezért az MOD' háromszögben MO-val szemben nagyobb szög van, mint $D'O$-val szemben ezért $MO > D'O$, tehát D' a k belsejében van, a B', C' metszéspontok valóban létrejönnek.

Ha M és A egyike sem azonos a B', C' pontokkal, akkor az AB', MC' egyenesek meg vannak határozva két-két pontjukkal, és nem párhuzamosak, hiszen B', C' nem lehetnek k átellenes pontjai, így C létrejön, és hasonlóan bizonyítható B létezése is.

A kapott ABC háromszögben BB', CC' magasságvonalak, M tehát magasságpont és $AM \perp BC$, $BC \| A'D$. A BC szakasz D^* felezőpontja elemzésünk szerint az OD' egyenesen van, hiszen ez k és k_1 centrálisa, és MBC, $MB'C'$ hasonlósága, valamint szerkesztésünk miatt $MD \| MD^*$, azaz D^* az MD egyenesen is rajta van. Eszerint D^* azonos az OD', MD egyenesek közös pontjával, D-vel, tehát ABC a keresett háromszög.

Ha M a B', C' pontok egyikével, mondjuk B'-vel azonos, akkor C is azonos M-mel, és B-t az MD, AC' egyenesek metszéspontja adja. Ebben az esetben C-nél derékszög van, és M valóban magasságpont, D, D' pedig az előírt szakaszokat felezik.

Ha A azonos a B', C' egyikével, akkor feladatunknak nincs megoldása.

Végül, ha M a DD' egyenesen van, akkor O nem jön létre, így A-t közvetlenül (1) alapján kell megszerkesztenünk: ha M a DD' szakaszon van, a DD' fölé rajzolt k_2 Thalész-kört a DD'-re M-ben emelt merőleges messe az U, V pontokban, ekkor a k_2 kör U és V-beli érintőinek a metszéspontja lesz A; ha pedig M a DD' szakasz meghosszabbításán van, akkor az M-ből k_2-höz húzott érintők érintési pontja lesz U és V, és DD'-ből az UV egyenes metszi ki A-t. A szerkesztés további lépései, és a szerkesztés helyességének a bizonyítása ennek megfelelően módosul.