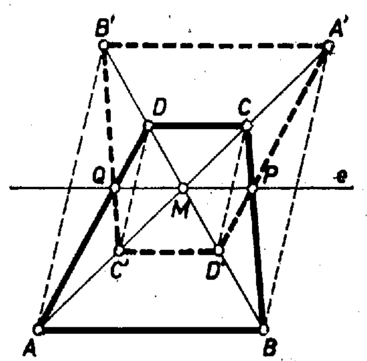
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy minden $ABCD = N$ konvex négyszöghöz van kívánt tulajdonságú e egyenes. Legyen N tükörképe az M pontra az $A'B'C'D' = N'$ négyszög. Ha $AM = MC$, akkor az AC átló egyenese megfelel e-nek; mindkét szemközti oldalpárral való metszéspontja A és C, így a feladat állítása is nyilvánvalóan teljesül.

Ha még $BM = MD$ is teljesül, akkor N paralelogramma, minden, az M-en átmenő egyenes megfelel e-nek és világos, hogy mindre teljesül a feladat állítása. Ha $BM \neq MD$, akkor B' és D' közül egyik N belsejében van, a másik rajta kívül, ezért N' határának $AB'C$ és $CD'A$ része közül egyik a végpontjaitól eltekintve N belsejében van, a másik rajta kívül, így AC-n kívül nincs más, e-nek megfelelő egyenes.

Vizsgáljuk a továbbiakban azt az esetet, ha M egyik átlót sem felezi. Válasszuk a betűzést úgy, hogy $AM > CM$ és $BM > DM$ teljesüljön. Ekkor C', D', s így az egész köztük levő szakasz N-ben van, az $A'B'$ szakasz N-en kívül van. Az $A'D'$ szakasz metszi a BC szakaszt egy P pontban, mert az $A'B'D'$ háromszög tartalmazza C-t, B viszont a $B'D'$ oldal meghosszabbításán van, $A'B'$ pedig, mint láttuk, N-en kívül (1. ábra).



1. ábra

P tükörképe, Q, rajta van N'-n, mert P az N-en van, és mivel P az N'-n is rajta van, az a pont, aminek ő a tükörképe, vagyis Q, rajta van N-en is. A PQ egyenes tehát alkalmas e-nek, és ez az egyetlen ilyen, mivel P-n és Q-n kívül nincs N és N' kerületének közös pontja.

Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy ha PQ metszi az AB, CD oldalak egyikét, akkor metszi a másikat is, és a metszéspontok egymás tükörképei M-re.

e csak akkor nem metszi pl. CD-t, ha párhuzamos vele. Megmutatjuk, hogy ez csak úgy lehetséges, ha e az AB-t sem metszi, azaz ha ezzel is párhuzamos. Tegyük fel, hogy $CD \parallel PQ$, és alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a CAD és CBD szögekre (1. ábra):

$$\frac{CA}{MA} = \frac{CD}{MQ} = \frac{DC}{MP} = \frac{DB}{MB},$$

a szélső arányokból 1-et–1-et levonva

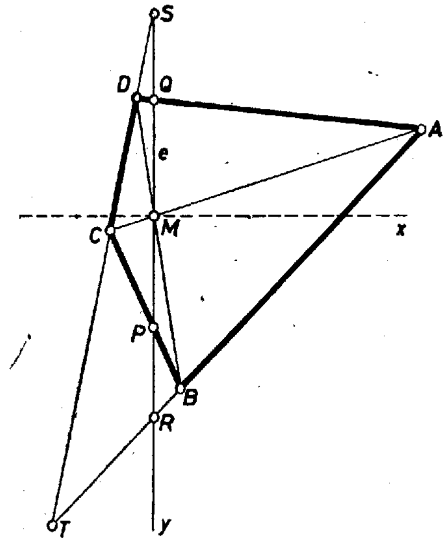
$$\frac{CA}{MA} - 1 = \frac{CA - MA}{MA} = \frac{CM}{MA} = \frac{DM}{MB},$$

ezek a szakaszok az egymást M-ben metsző AC, BD egyeneseken feküsznek, így valóban $CD \parallel AB$, tehát $PQ \parallel AB$, amint állítottuk.

Itt nem használtuk fel az átlók részeinek nagyságviszonyára vonatkozó fentebbi feltevéseket, ezért bizonyításunk az $AB \parallel PQ$ és $MP = MQ$ feltevésből kiindulva is érvényes. Ezzel a feladat állításának első részét bebizonyítottuk.

Azt is kaptuk, hogy ha a mondott PQ egyenes nem metszi az AB, CD egyenesek egyikét, akkor N trapéz (és a tett korlátozás folytán $AB \neq CD$). Fordítva, ha $AB \parallel CD$ és $AB \neq CD$, akkor $PQ \parallel AB$. Ugyanis az $ABA'B'$ és $C'D'CD$ paralelogrammák hasonló helyzetűek az M középpontra vonatkozóan, így $BA'CD'$ trapéz, és az átlóinak P, valamint szárainak M metszéspontját összekötő e egyenes felezi a BA', CD' alapokat, tehát az előbbi paralelogrammáknak középvonala.

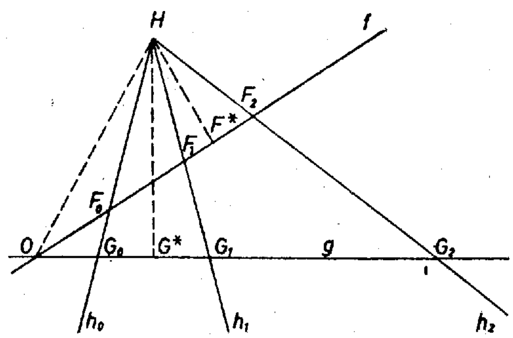
Eszerint ha N nem trapéz, akkor AB és CD metszik egymást egy T pontban, másrészt PQ metszi AB-t, CD-t egy R, ill. S pontban, és azt kell megmutatnunk, hogy $MR = MS$



2. ábra

Felhasználjuk a következő, alább bebizonyítandó segédtételt: *Ha a sík egymást O-ban metsző f és g egyenesét a H-n átmenő* h_0, h_1, h_2 *egyenesek rendre az* F_0, F_1, F_2, *ill.* G_0, G_1, G_2 *pontban metszik* (3. ábra), más kifejezéssel: *ha a g egyenes O,* G_0, G_1, G_2 *pontnégyesét a H pontból az f egyenes O,* F_0, F_1, F_2 *pontnégyesébe vetítjük át, akkor*

(1)
$$\frac{OG_1}{G_1G_0} : \frac{OG_2}{G_2G_0} = \frac{OF_1}{F_1F_0} : \frac{OF_2}{F_2F_0}.$$



3. ábra

Ezt kétszer alkalmazzuk; O, G_0, G_1, G_2 szerepére mindkétszer a CD egyenesnek rendre S, D, C, T pontját választjuk; f-ként mindkétszer e-t vesszük, de H szerepére először A-t, másodszor B-t választjuk; így F_0, F_1, F_2 helyére először Q, M, R lép, másodszor M, P, R, tehát

$$\frac{SC}{CD} : \frac{ST}{TD} = \frac{SM}{MQ} : \frac{SR}{RQ} = \frac{SP}{PM} : \frac{SR}{RM}.$$

Az utóbbi két arány egyenlőségéből, $PM = MQ$ felhasználásával, majd a szakaszok hosszát csupa M-ből induló szakasszal kifejezve, beszorozva, egyszerűsítve

$$SM \cdot RQ = SP \cdot RM,$$
$$MS(MR + MQ) = (MS + MP) \cdot MR,$$
$$MS = MR, \qquad qu.\ e.\ d.$$

Visszatérve a segédtétel bizonyítására, szorozzuk meg (1) első tagjának számlálóját is, nevezőjét is HG^*-gal, ahol G^* a H pont vetülete g-n, majd a szorzatokat – mint a HOG_1, ill. HG_1G_0 háromszög területe mértékszámának 2-szeresét – fejezzük ki e háromszögek H-ból induló oldalaival és a köztük levő szöggel:

$$\frac{OG_1}{G_1G_0} = \frac{OG_1 \cdot HG^*}{G_1G_0 \cdot HG^*} = \frac{2 \cdot HOG_1}{2 \cdot HG_1G_0} =$$
$$= \frac{HO \cdot HG_1 \sin OHG_1\sphericalangle}{HG_1 \cdot HG_0 \sin G_1HG_0\sphericalangle} = \frac{HO \sin OHG_1\sphericalangle}{HG_0 \sin G_1HG_0\sphericalangle}.$$

Ebből (1) második tagjának hasonló alakítását az 1-es index 2-esre cserélésével kapjuk, a 3. és 4. tagéit pedig az első kettőből a G betűknek F-re cserélésével, ami által kellő egyszerűsítések után (1) a nyilvánvalóan igaz

$$\frac{\sin OHG_1\sphericalangle}{\sin G_1HG_0\sphericalangle}:\frac{\sin OHG_2\sphericalangle}{\sin G_2HG_0\sphericalangle}=\frac{\sin OHF_1\sphericalangle}{\sin F_1HF_0\sphericalangle}:\frac{\sin OHF_2\sphericalangle}{\sin F_2HF_0\sphericalangle}$$

egyenlőségbe megy át.

Takács László (Sopron, Széchenyi I. Gimn.) és
Mészáros József (Makó, József A. Gimn.)
dolgozatainak felhasználásával és kiegészítésekkel

II. megoldás (vázlat). Az állítás második részét koordináta-geometriai úton bizonyítjuk, támaszkodva az I. megoldás azon részeire, amelyek szerint az $e = PQ$ egyenes általában egyértelműen létezik.

y tengelynek a PQ egyenest, origónak az M pontot választjuk, legyen továbbá P ordinátája $-p$, így Q-é p, az ezeken átmenő oldalegyenesek, valamint az átlók egyenesének egyenlete:

$$\begin{array}{llll} BC: & y = bx - p, & AD: & y = ax + p, \\ BD: & y = nx, \quad (n \neq a, b) & AC: & y = mx. \quad (m \neq a, b) \end{array}$$

Így azt kell megmutatnunk, hogy az y tengely és az AB, ill. CD egyenes metszéspontja közti szakaszt M felezi, a két ordináta egymásnak (-1)-szerese.

AD és AC egyenletéből A abszcisszája

$$x_A = \frac{p}{m-a},$$

többi csúcsokét ebből az alábbi helyettesítésekkel kapjuk:

	p	m	a helyére
C esetében	$-p$	m	b lép
B esetében	$-p$	n	b lép
D esetében	p	n	a lép.

Azt is mondhatjuk, hogy D abszcisszáját B-éből úgy kapjuk, hogy p és b helyére rendre $-p$-t, a-t írunk. Az ordináta mindig az abszcissza m-szerese, ill. n-szerese.

Általában az $L_1(u_1, v_1)$, $L_2(u_2, v_2)$ pontokkal meghatározott egyenes és az y tengely metszéspontjának ordinátája az

$$y = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}(x - u_1), \qquad x = 0$$

egyenletrendszerből:

$$v_1 + \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}(-u_1) = \frac{u_2v_1 - u_1v_2}{u_2 - u_1}.$$

Legyen itt $L_1 = A$, $L_2 = B$, így az AB oldalegyenes és a PQ egyenes R metszéspontjának ordinátája, a fentiek felhasználásával:

$$\frac{u_2mu_1 - u_1nu_2}{u_2 - u_1} = \frac{(m-n)u_1u_2}{u_2 - u_1} = \frac{m-n}{\dfrac{1}{u_1} - \dfrac{1}{u_2}} =$$
$$= \frac{m-n}{\dfrac{m-a}{p} + \dfrac{n-b}{p}} = \frac{(m-n)p}{(m+n)-(a+b)}.$$

Ebből könnyen megkapjuk a CD egyenes y tengelyen levő S pontjának ordinátáját, A helyére C-t és B helyére D-t írva, ugyanis – mint láttuk – eközben p helyére mindkét helyettesítés miatt $-p$ lép, a másik helyettesítés viszont – ti. a helyére b, ill. b helyére a – egymástól független. Így S ordinátája

$$\frac{(m-n)(-p)}{(m+n)-(b+a)},$$

és ez az előrebocsátott megjegyzés szerint az állítást igazolja.

Itt nem volt célunk annak elemzése, hogy a metszéspontok milyen a, b, m, n értékrendszerek esetén léteznek. Azt mindenesetre látjuk, hogy S létezésének feltételei ugyanazok, mint R létezésének feltételei. Ezzel teljesítettük kitűzött célunkat.