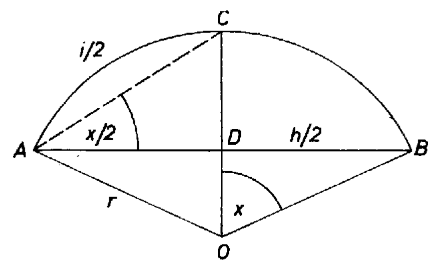
Legyen a kérdéses AB körív középpontja O, sugara $OA = r$, az ív és a húr hossza i, ill. h.



A szelet t területe az AOB körcikk és az AOB háromszög területének különbségeként, az adatokat felhasználva

$$t = \frac{ir}{2} - \frac{h\sqrt{r^2 - h^2/4}}{2} = 5r - 4\sqrt{r^2 - 16}.$$

Legyen még az ív felezőpontja C, és $COB\sphericalangle = x$. Ekkor $r = h/(2\sin x)$, másrészt $i = 2rx$ (x-et ívmértékben véve), innen r kiküszöbölésével

(1)
$$\frac{x}{\sin x} = \frac{i}{h} = \frac{5}{4}, \qquad x = \frac{5}{4}\sin x.$$

Ennek az egyenletnek közelítő megoldását fogjuk keresni.

Alsó korlátot ad x-re az az ismert tény, hogy $x = 60^\circ = \pi/3$ esetén $i = r \cdot 2\pi/3$, $h = r\sqrt{3}$,és $i/h = 2\pi/\sqrt{27} < 1{,}21 < 1{,}25$, ugyanis az i/h arány a középponti szög növekedésével nő (amíg $0 < x < \pi/2$), eszerint $x > 60^\circ$.

Felső korlátot kapunk viszont az ACD derékszögű háromszögből, ahol D az AB húr felezőpontja, ebben ugyanis $DAC\sphericalangle = x/2$, és az AC átfogó kisebb az ív felénél:

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{AD}{AC} > \frac{h/2}{i/2} = 0{,}8, \qquad \frac{x}{2} < 36{,}8^\circ, \qquad x < 73{,}6^\circ.$$

Próbálkozzunk e két korlát között $x = 65^\circ$-kal, ami radiánban 1,1345, (1) jobb oldala pedig

$$(5/4)\cdot\sin x = (5/4)\cdot 0{,}9063 = 1{,}1229; \quad x/\sin x = 1{,}252 > 1{,}25.$$

Eszerint $x < 65^\circ$, de jóval közelebb áll 65°-hoz, mint 60°-hoz.

Második próbaként $x = 64{,}5^\circ$-ot véve a két oldal 1,1257, ill. $(5/4)\cdot 0{,}9026 = 1{,}1282$; $x/\sin x = 1{,}247$, ezért $x > 64{,}5^\circ$. A kívánt 1,25 arány a talált értékek közti (1,247, 1,252) intervallumot $3 : 2$ arányban osztja, ezért a $64{,}5^\circ$ és 65° közti intervallumot $3 : 2$ arányban osztó $64{,}8^\circ$-kal célszerű próbálkozni. Ezzel (1) mindkét oldala 1,1310, a táblázatunk alapján elérhető pontossággal (1) megoldása $x = 64{,}8^\circ$.

Most már $r = h/(2\sin x) = 4{,}42$ hosszúságegység, és az előrebocsátottak szerint $t = 22{,}1 - 4\sqrt{0{,}42\cdot 8{,}42} = 14{,}6$ területegység.

Tóth Tibor (Szolnok, Verseghy F. g. III. o. t.)
Kovács Tamás (Győr, Czuczor G. Bencés g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A $(\sin x)/x = 0{,}8$ egyenletre első közelítő értéket kapunk úgy is, hogy az iskolai függvénytáblázatban található

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

kifejezés első 3 tagját vesszük figyelembe, az így adódó

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} = 0{,}8, \quad x^4 - 20x^2 + 24 = 0$$

egyenletet megoldjuk, és gyökei közül a célszerűnek látszó

$$x = \sqrt{10 - \sqrt{76}} \approx 1{,}132 \approx 65^\circ$$

-ot vesszük kiindulásul.

2. Elkerülhetjük a fok-radián táblázat használatát. Az $x_{\text{rad}} = (\pi/180^\circ)\cdot x_{\text{fok}}$ összefüggés alapján (1) így alakítható (tovább x-et fokban mérjük):

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{4\pi}{900} = 0{,}013963 \qquad (= c).$$

$x = 60^\circ$, 70°, 65°, 64° esetén az osztás logaritmus használata nélkül is gyorsan végezhető, a hányados rendre

$$0{,}01443 \quad (> c), \qquad 0{,}01342 \quad (< c), \qquad 0{,}013943 \quad (< c), \qquad 0{,}014044 \quad (> c).$$

Az utolsó kettőben a hiány és a többlet aránya $(-0{,}00020) : (+0{,}00081) = 1 : 4$, ebből ismét $64{,}8^\circ$ adódik.